

Dimensionierung, Konstruktion und Bau eines mit flüssigem Helium
gekühlten Strahlstrom-Transformators mit einem SQUID

Diplomarbeit

im

Fachbereich Physikalische Technik

der

Fachhochschule Wiesbaden

Angefertigt bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung
in Darmstadt

von

Volker Dürr

Referent: Dr. U. Wolfangel, FH Wiesbaden

Koreferent: Dipl.-Phys. A. Peters, GSI Darmstadt

Rüsselsheim, Januar 1993

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Liste der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen	1
1. Einleitung	7
2. Grundlagen	10
2.1 Die Supraleitung	10
2.1.1 Das Verschwinden des elektrischen Widerstandes	10
2.1.2 Der supraleitende Zustand	10
2.1.3 Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt	12
2.1.4 Die Eindringtiefe	13
2.2 Die Josephson-Effekte	14
2.2.1 Gleichstrom-Josephson-Effekt	15
2.2.2 Wechselstrom-Josephson-Effekt	17
2.3 SQUIDs	18
2.3.1 RF-SQUIDs	21
2.3.2 DC-SQUIDs	21
2.4 Der Strahlstrom-Transformator	23
2.4.1 Physikalische Grundlagen	23
2.5 Das Meßprinzip eines Kryo-Strahlstrom-Komparators	26
2.6 Störquellen	27
2.6.1 Einfluß paramagnetischer Ionen auf den Supraleiter	27
2.6.2 Elektromagnetische Effekte	28
2.6.3 Thermisches Rauschen der Spule	28
2.6.4 Sonstige Störgrößen	31
3. Anforderungen an das Meßsystem	31
3.1 Meßtechnische Anforderungen	31
3.2 Konstruktive Anforderungen	32
4. Dimensionierung des Kryo-Strahlstrom-Transformators	33

4.1 DC-SQUID-Meßsystem	33
4.1.1 Betrieb des SQUID-Sensors	34
4.1.2 Technische Daten	35
4.2 Auflösungsvermögen	36
4.3 Ringbandkerne für tiefe Temperaturen	41
4.4 Dimensionierung des Transformator kernels	42
4.5 Dimensionierung des Anpassungstransformators	43
4.6 Die magnetische Abschirmung	46
5. Beschreibung der Apparatur	50
5.1 Konstruktionsmerkmale	52
5.2 Werkstoffe und Fertigungsverfahren	56
6. Vorbereitende Messungen	58
6.1 Das SQUID-Meßsystem	58
6.1.1 Einstellen und Abgleich des SQUID-Meßsystems	59
6.1.2 Messung der rauschbegrenzten Auflösung	61
7. Ausblick	64
7.1 Die supraleitende Abschirmung	64
7.2 Testmessung	66
8. Literaturverzeichnis	67
Dank	70
Tabellarischer Lebenslauf	71
Eigenständigkeitserklärung	72
Anhang A:	
Vertiefende Rechnungen zur magnetischen Abschirmung	A1

Anhang B:

MATHCAD-Programm zum Bestimmen der Auflösungsgrenze B1

Anhang C:

MATHCAD-Programm zum Bestimmen der maximalen
Abschwächung der magnetischen Abschirmung C1

Anhang D:

Konstruktionszeichnungen und Stücklisten D1

Zusammenfassung

Die Intensität eines Teilchen-Stroms soll bestimmt werden. Hierzu ist ein Kryostrom-Transformator entwickelt worden. Bei dem Strahlstrom handelt es sich um einen gepulsten Gleichstrom, der aus leichten aber auch aus schweren geladenen Teilchen bestehen kann.

Die Messung erfolgt über die azimuthale Magnetfeldkomponente des Strahls. Das Magnetfeld erzeugt in einem torodialen, supraleitenden Flußtransformator einen supraleitenden Strom, dessen Größe mit einem SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) detektiert wird. Damit das Meßsystem relativ geringe Abmessungen bei extrem hoher Auflösungsgrenze aufweist, kommt ein hochpermeabler Induktionsringbandkern zur Anwendung. Die Auflösungsgrenze wird vom Nyquist-Rauschen der Sensorspule begrenzt und beträgt theoretisch 0.5 nA. Aufgrund dessen, daß das SQUID ein Kaufteil ist, an dessen Parametern nichts verändert werden kann, wird mit Hilfe eines Anpaßtransformators das mit der Sensorspule detektierte Signal an das SQUID-Eingangssignal angeglichen, um so eine optimale Anpassung zu gewährleisten. Das SQUID-Ausgangssignal wird mit entsprechenden Verstärkern und Rauschfiltern moduliert. Das entstehende Signal wird angezeigt und dient als Gegenkopplungssignal, d. h. mit dem Meßsystem wird eine Differenzmessung durchgeführt. Die Gegenkopplung wird mit einem stromdurchflossenen Leiter, der dem Strahlstrom entgegenwirkt, realisiert. Durch eine geeignete supraleitende Abschirmung der torodialen Sensorspule des Flußtransformators ist das Meßsystem unempfindlich gegen Störfelder und unabhängig von der geometrischen Lage des Strahls innerhalb der Sensorspule. Mit Hilfe der supraleitenden Abschirmung wird das zu messende Signal annähernd verlustfrei (3 % Verlust) eingekoppelt. Störende, äußere magnetische Felder werden vom Meßsystem mit einem Abschirmfaktor von 10^{-9} abgeschirmt. Damit das extrem hohe Auflösungsvermögen erreicht wird, ist eine magnetisch dichte Verbindung zwischen Detektorsystem und SQUID-Gehäuse entwickelt worden. Die Steuer- und Signalleitungen werden über eine magnetische Falle aus dem Gehäuse geführt. Mittels spezieller Kryoleitungen wird die elektrische Verbindung zwischen dem Meßsystem und dem Verstärker, der sich außerhalb des Kryostaten befindet, hergestellt. In Testmessungen, bei denen der Strahlstrom mit einem stromdurchflossenen Leiter simuliert wird, soll das praktische Auflösungsvermögen ermittelt werden.

Liste der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen

A	Fläche
A_{Fe}	Eisenfläche
A_j	Josephson-Kontaktfläche
A_L	Induktivitätsfaktor
$A_{L, KSK}$	Induktivitätsfaktor der Detektorspule
A_z	Abschwächung der magnetischen z-Komponente
A_ϕ	Abschwächung der magnetischen ϕ -Komponente
\vec{B}	magnetische Flußdichte
\vec{B}_a	äußere magnetische Flußdichte
c	Lichtgeschwindigkeit
d_a	Außendurchmesser
$d\vec{A}$	Flächenelement
df	Frequenzintervall
d_i	Innendurchmesser
$d\vec{s}$	Wegstück
e	Elementarladung (= $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)
\vec{E}	elektrische Feldstärke
E	Energie
f	Frequenz
f_j	Josephsonfrequenz
f_0	Grundfrequenz
h^*	Höhe
h	Planck-Konstante (= $6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$)

\hbar	Drehimpulsquantum (= $h/2\pi$)
\vec{H}	magnetische Feldstärke
\vec{H}_{eff}	effektive magnetische Rauschfeldstärke
\vec{H}_r	magnetische Rauschfeldstärke
i	Momentanstrom
i_c	kritischer Strom
i_s	Schirmstrom
$i(x,y)$	Strahlstromprofil
i_ω	Rauschstrom
I_b	versorgender Gleichstrom
I_{el}	Erregerstrom
I_{ges}	Gesamtstrom
I_{Strahl}	Strahlstrom
I_{SIS}	Strahlstrom im Schwerionen- Synchrotron
$I(t)$	Strom als Funktion der Zeit
I_T	Strahlstrom am Meßort
I_0	Ursprungsstrom
I_1	Strom durch die Wicklung 1
j_s	Josephsonstromdichte
j_{smax}	maximale Josephsonstromdichte
k_B	Boltzmann-Konstante (= $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K)
k	Kopplungsfaktor
l	Länge des Schirmsystems
l_{Fe}	mittlere magnetische Länge
L	Induktivität
L_D	Detektorinduktivität
L_E	Eingangsinduktivität

L_P	Parallelinduktivität
L_R	Reiheninduktivität
L_{SQ}	SQUID-Induktivität
L_1	Primärinduktivität des Flußtransfor- mators
L_2	Sekundärinduktivität des Flußtrans- formators
m	Laufzahl (= 1, 2, 3 . . .)
M	Laufzahl (= 1, 2, 3 . . .)
M_{SQ}	SQUID-Gegeninduktivität
M_{1D}	Gegeninduktivität der Spule und der Detektorspule
N_1	Primärwindungsanzahl des Flußtrans- formators
N_2	Sekundärwindungsanzahl des Fluß- transformators
$(N_D)_{opt}$	optimale Detektorwindungsanzahl
\vec{p}	Impuls
r	Radius
r_a	Außenradius
r_i	Innenradius
R	Widerstand
R_R	Reihenverlustwiderstand
R_P	Parallelverlustwiderstand
t	Zeit
t_{ex}	Extraktionszeit
T	Temperatur
T_c	Übergangstemperatur

u_{ind}	Induktionsspannung
u_{ω}	Rauschspannung
u	Spannung
$u(t)$	Spannung zum Zeitpunkt t
U_0	Ursprungsspannung
U_s	Spannung am Josephson-Kontakt
\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis
v	Geschwindigkeit
V_{Fc}	Kernvolumen
W	Energie der Strahlionen
x^*	Substituent
y^*	Substituent
z^*	Substituent
z	z -Koordinate
Z	komplexer Widerstand
α_{SQ}	äquivalentes Flußrauschen im SQUID
β	Relativgeschwindigkeit ($\beta = v / c$)
δ	Phasendifferenz (allgemein)
δ_0	Phasendifferenz, bezogen auf ein Flußquant
δI_{eff}	effektives Stromrauschen
δ_{KSK}	Proportionalitätsfaktor
ΔE	Energiedifferenz
Δf	Bandbreite

ΔI	Stromaflösung
ΔI_m	Empfindlichkeit der Modulationsspule
ΔI_{st}	Empfindlichkeit der Eingangsspule
$\Delta\varphi$	Phasendifferenz
ζ_{c0}	Kohärenzlänge
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante (= $8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
ϵ_r	Dielektrizitätszahl
μ_r	Permeabilität
μ_0	Magnetische Feldkonstante (= $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m)
Φ_{12}	magnetischer Nutzfluß
Φ_s	magnetischer Streufluß
Φ_{ext}	externer magnetischer Fluß
Φ_n	rauschbegrenzte Flußempfindlichkeit
Φ_J	magnetischer Fluß durch den Josephson-Kontakt
Φ_0	Elementares Flußquant (= $2.07 \cdot 10^{-15}$ Wb)
Φ_a	äußerer magnetischer Fluß
Φ_g	Gleichstromflußdichte
Φ_G	gesamter magnetischer Fluß
Φ_i	innerer magnetischer Fluß
Φ_{SQ}	magnetischer Fluß im SQUID
Φ^*	momentaner magnetischer Fluß
φ	Phasenwinkel
ρ	Radius

ϱ	spezifischer Widerstand
ω	Kreisfrequenz
ω_j	Josephsonkreisfrequenz
BCS	Bardeen, Cooper, Schrieffer
DC	Gleichstrom
ESR	Experimentier-Speicher-Ring
GSI	Gesellschaft für Schwerionenforschung
HF	Hochfrequenz
PTFE	Polytetrafluoräthylen
RF	Hochfrequenz
SIS	Schwer-Ionen-Synchrotron
SQUID	Superconducting Quantum Inter- ference Device
UNILAC	Universal Ion Linear Accelerator

1. Einleitung

Die Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) ist eine Großforschungseinrichtung der Bundesrepublik Deutschland und des Landes Hessen, die Grundlagenforschung auf den Gebieten Atom- und Kernphysik mit schnellen schweren Ionen betreibt.

Abb.1 zeigt den Grundriß der gesamten Beschleunigeranlage. Neben dem Linearbeschleuniger UNILAC zur Beschleunigung von Ionen existieren ein Schwer-Ionen-Synchrotron (SIS) und ein Experimentier-Speicher-Ring (ESR).

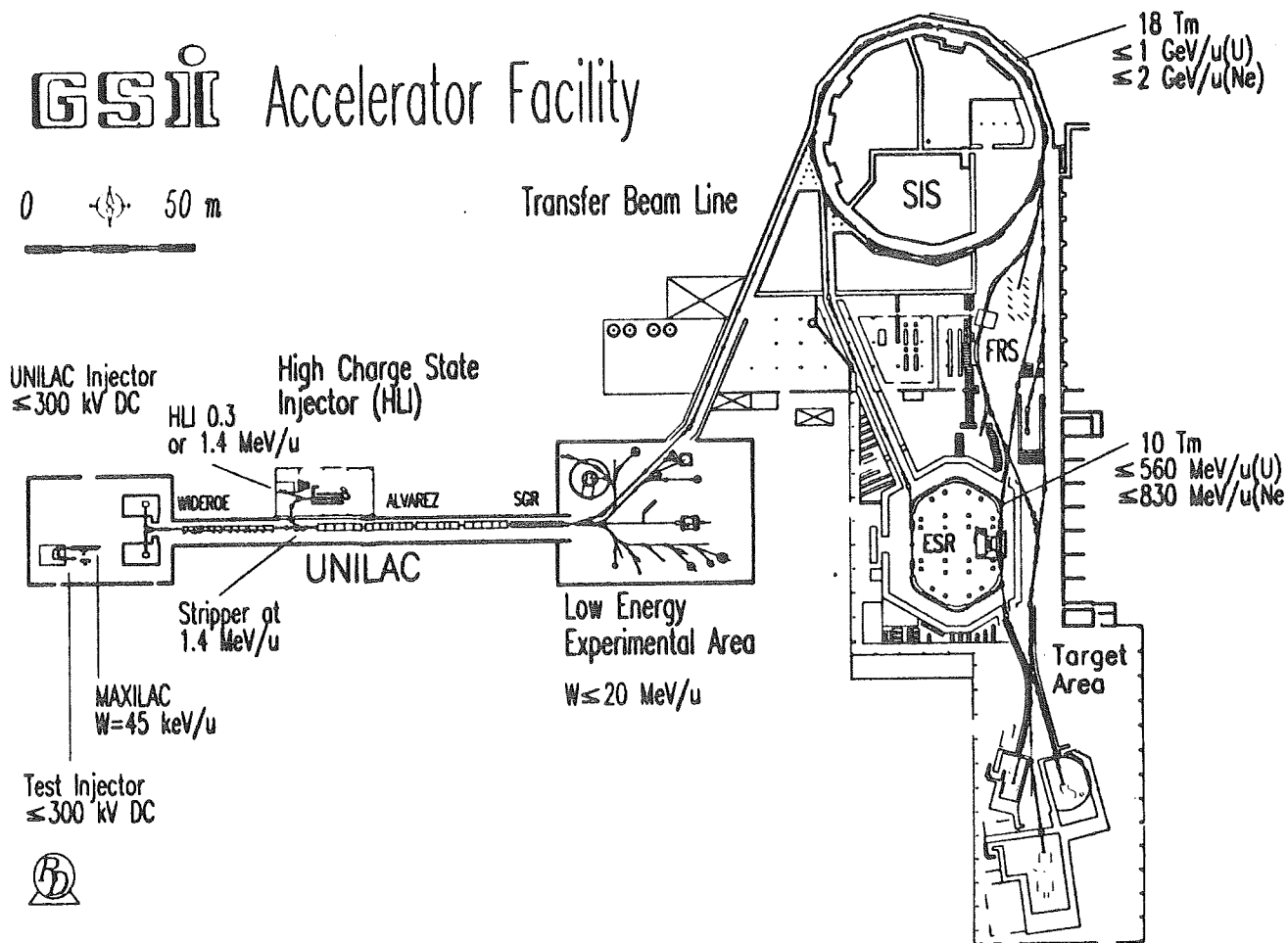


Abb.1: Grundriß der GSI-Beschleunigeranlage /1/

Der Linearbeschleuniger UNILAC dient mit einer Ionenquelle als Ioneninjektor für das SIS.

Für den Betrieb des Beschleunigers und für die Experimente ist die genaue Kenntnis des Ionenstrahlzustandes notwendig.

Folgende Größen können zu einer Diagnose des Ionenstrahles herangezogen werden:

- Strahlstrom I_{Strahl}
- Strahlprofil $i(x,y)$; die Ionenstromdichteverteilung über den Strahlquerschnitt
- Strahlposition; der Ladungsschwerpunkt des Ionenstrahles bezüglich der Strahlrohrmittellinie
- Energie der Strahlionen W
- Emittanz, die Ionenstromdichteverteilung und deren Ausbreitungsrichtung bezüglich der Strahlrohrmittellinie

Abb.2 stellt den bisher meßbaren Ionenstrom in Abhängigkeit der Ionisation und der Kernladungszahl dar.

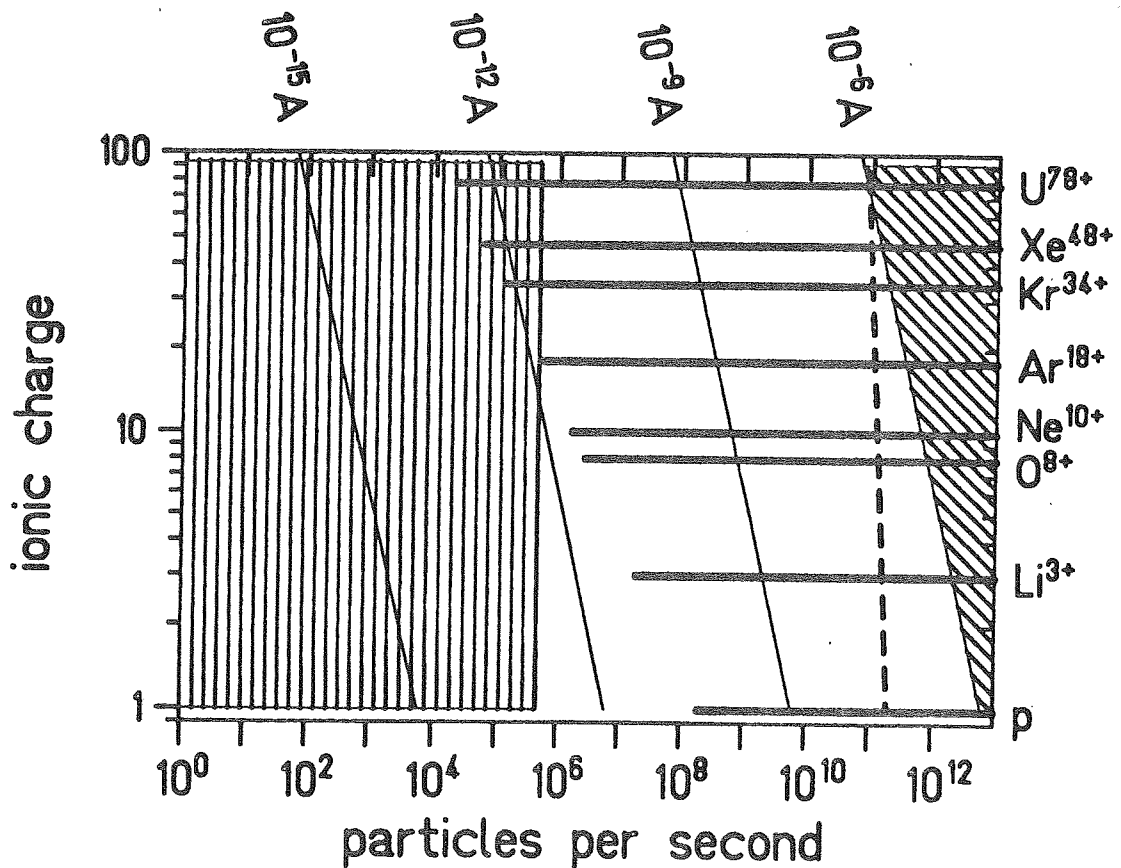


Abb.2: Darstellung des bisher meßbaren Ionenstromes /2/

Ist der Strahlstrom größer als 10^{-6} A , kann er mit herkömmlichen Strahlstrom-Transformatoren praktisch zerstörungsfrei bestimmt werden, ist er kleiner als 10^{-11} A , wird er mit Szintillatoren gemessen. Der Nachteil dieses Meßverfahrens ist die Beeinflussung des Strahls, er verliert Energie und divergiert.

Aufgrund der Energien pro Kernbaustein ($100 - 2000 \text{ MeV / u}$) kommen in dem

" Lückenbereich " lediglich Sekundär-Elektronen-Monitore zur Anwendung. Dieses Meßverfahren hat den Nachteil, daß es für jede Ionenart und für jede Messung kalibriert werden muß; es ist kein genaues Verfahren.

Tab. 1: Abhängigkeit des zu messenden Stroms I_T von den verschiedenen SIS-Parametern

Stoff	$t_{\text{ex}} / [\text{ms}]$	$I_{\text{SIS}} / [\mu\text{A}]$	$W / [\text{MeV}]$	β	$I_T / [\text{nA}]$
$^{18}\text{O}^{3+}$	1500	10000	340	0.681	7,1
$^{129}\text{Xe}^{21+}$	500	500	790	0.841	1.7
$^{208}\text{Pb}^{26+}$	500	500	650	0.808	$23 \cdot 10^{-3}$
$^{238}\text{U}^{28+}$	1000	1000	950	0.869	$86 \cdot 10^{-3}$

Tab. 1 zeigt die zur Zeit erreichbaren Strommeßgrenzen für verschiedene Ionenarten. Mit der Inbetriebnahme eines Hochstrominjektors wird die Quellenleistung und damit der zu messende Strom erhöht. Zur Zeit wäre eine Erhöhung des Stroms durch eine Reduzierung der Extraktionszeit möglich. Im Hinblick auf die höheren Ströme, die nach dem SIS bestimmt werden sollen, ist ein Meßsystem notwendig, das eine praktisch zerstörungsfreie Absolutmessung ermöglicht.

Die vorliegende Diplomarbeit befaßt sich mit der Entwicklung und Erprobung eines mit flüssigem Helium gekühlten Strahlstromtransformators, der mit einem SQUID das notwendige Auflösungsvermögen ermöglichen soll.

Ziel der Arbeit ist es, ein magnetisches Abgriffsystem zu entwickeln, mit dessen Hilfe das geforderte Auflösungsvermögen erreicht werden kann. Desweiteren soll eine elektromagnetische Anpassung des Abgriffsystems an den SQUID erfolgen. Eine supraleitende magnetische Abschirmung soll konstruiert werden, so daß ein weitgehend funktionsfähiges Meßgerät verwirklicht wird. Den erreichten Entwicklungsstand des Strahlstrom-Transformator-Meßsystems belegen die Messungen bzw. Abschätzungen der wichtigsten Systemparameter. Der Anhang der Arbeit enthält Berechnungen zur supraleitenden magnetischen Abschirmung, Berechnungsprogramme des Auflösungsvermögens sowie der supraleitenden, magnetischen Abschirmung, die Konstruktionszeichnungen und Stücklisten.

2. Grundlagen

2.1 Die Supraleitung

Die Supraleitung wurde 1911 von Kamerling Onnes in Leiden entdeckt. Die theoretische Behandlung der Supraleitung gelang nur zögernd. Die erste, 1935 von F. und H. London entwickelte phänomenologische Theorie konnte zwar einen Teil der Erscheinungen befriedigend beschreiben, doch wurde eine Deutung der Ursache der Supraleitung erst 1957 durch die mikroskopische Theorie von Bardeen, Cooper und Schrieffer möglich. Sowohl diese BCS-Theorie als auch die 1951 entstandene phänomenologische Theorie von Ginzburg und Landau stimulierten in starkem Maße die Forschung, die zur Entdeckung neuer Effekte in Supraleitern sowie vieler neuer supraleitender Substanzen führte.

2.1.1 Das Verschwinden des elektrischen Widerstandes

Bei den ersten Untersuchungen zur Supraleitung wurde eine konventionelle Methode der Widerstandsmessung verwendet. Es wurde die elektrische Spannung an der von einem Strom durchflossenen Probe gemessen. Dabei konnte nur festgestellt werden, daß der Widerstand bei Eintritt der Supraleitung unter die Empfindlichkeitsgrenze der Meßanordnung absank. Da es prinzipiell unmöglich ist, mit Hilfe eines Experimentes festzustellen, ob der Widerstand exakt null ist, muß immer eine obere Grenze für den Widerstand im Supraleiter angegeben werden.

Eine konventionelle Meßmethode wurde von Onnes entwickelt. Man beobachtet das Abklingen eines Stromes in einem geschlossenen supraleitenden Kreis. Klingt der Strom mit der Zeit ab, ist ein Widerstand vorhanden. Aus der Beobachtungszeit sowie der Geometrie des supraleitenden Stromkreises ist eine obere Grenze des Widerstandes bestimmbar.

2.1.2 Der supraleitende Zustand

Der elektrische Widerstand in Metallen entsteht dadurch, daß die Elektronen, die Träger des elektrischen Stromes, ihre im elektrischen Feld aufgenommene Energie durch inelastische Stöße mit den Atomen des Metallgitters an das Gitter abgeben. Da man bereits bald nach der Entdeckung der Supraleitung wußte, daß auch der widerstandslose Supra-
strom von Elektronen getragen wird, suchte man nach der Ursache, die eine Energie-

abgabe der Elektronen an das Gitter verhindert.

Es konnte gezeigt werden, daß ein widerstandsfreier Stromtransport dann möglich wird, wenn sich jeweils zwei Elektronen mit entgegengesetzt gleichem Impuls und Spin zu einem Paar, dem sogenannten Cooper-Paar, zusammenschließen:

$$(1) \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 .$$

Die Zahl der Cooper-Paare nimmt nach Unterschreiten der Sprungtemperatur stetig zu, bis bei $T_c = 0 \text{ K}$ alle Leitungselektronen den Suprastrom tragen.

Ein Elektron kann mit einem anderen Elektron dadurch wechselwirken, daß es mit diesem Phononen austauscht. Die Austauschphononen nennt man virtuell, da sie nur während des Übergangs von einem Elektron zum anderen existieren. Die Wechselwirkung wird schematisch in Abb.3 dargestellt.

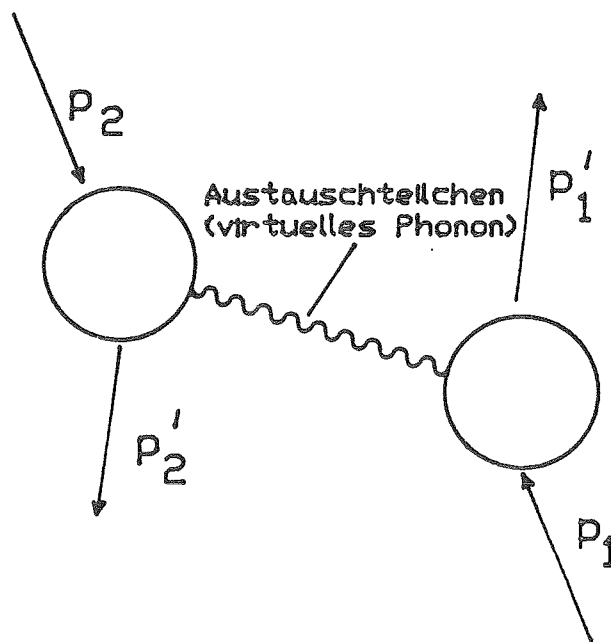


Abb. 3: Elektron-Elektron-Wechselwirkung /3/

Sie kann unter gewissen Bedingungen, die in Supraleitern vorliegen, so stark sein, daß die Anziehung der Elektronen gegenüber den elektrostatischen Kräften überwiegt.

Die mittleren Abstände, über die diese Paarkorrelation wirksam ist, liegen für reine Supraleiter zwischen 100 nm und 1000 nm. Man nennt diese Länge die Kohärenzlänge $\zeta_{c,0}$ des Cooper-Paars.

Die Supraleitung kann durch ein genügend großes Magnetfeld zerstört werden. Bezüglich der Größe dieser kritischen Magnetfelder, lassen sich sämtliche Supraleiter in drei Gruppen einteilen. Zu den Typ-I-Supraleitern gehören Niob, Vanadium und alle anderen supraleitenden reinen Metalle. Die zweite Gruppe, die Typ-II-Supraleiter, umfaßt alle supraleitenden Legierungen, unter denen vor allem die Niob-Legierungen für technische Anwendungen eine große Bedeutung erlangt haben. Die Typ-III-Supraleiter werden üblicherweise als harte Supraleiter bezeichnet. Sie unterscheiden sich von den Typ-II-Supraleitern durch die Art ihrer Magnetisierbarkeit.

Die kritischen Magnetfelder der Typ-II- und der Typ-III-Supraleiter können über zwei Größenordnungen höher liegen als die der Typ-I-Supraleiter. Eine Zerstörung des supraleitenden Zustandes tritt dann auf, wenn durch den Supraleiter ein genügend großer Strom fließt, welcher durch ein äußeres Magnetfeld erzeugt werden kann. Der kritische Strom i_c ist der, welcher an der Probenoberfläche gerade das kritische Magnetfeld \vec{B}_c erzeugt.

2.1.3 Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Bringt man einen Typ-I-Supraleiter, z. B. einen langen Bleizylinder, in ein Magnetfeld $\vec{B} < \vec{B}_c$, so werden in der Probenoberfläche durch Induktion Ströme angeworfen, die nicht wie im Normalleiter abklingen, sondern als Dauerströme weiterfließen.

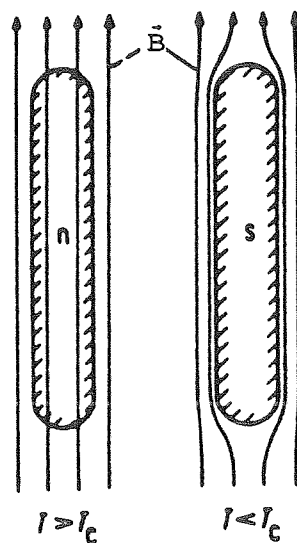


Abb. 4: Feldverdrängung bei einem Typ-I-Supraleiter. Die Probe wird im Magnetfeld abgekühlt /3/.

Diese Dauerströme verhindern das Eindringen von magnetischem Fluß in das Innere. Hätte der Supraleiter nur die Eigenschaft des idealen Leiters mit einer unendlichen Leitfähigkeit, könnten in seinem Innern auch Magnetfelder eingefroren werden, sofern sie im normalleitenden Zustand bei einer Temperatur $T > T_c$ angeregt wurden. Nach Übergang in den Zustand der unendlichen Leitfähigkeit würden beim Abschalten des äußeren Feldes in der Oberfläche Dauerströme induziert werden, die jede Feldänderung in der Probe verhindern. Der Zustand im Innern des idealen Leiters wäre damit vom Weg der Versuchsführung abhängig, d. h. der Übergang Normalleitung - Supraleitung wäre nicht reversibel. Meißner und Ochsenfeld konnten zeigen, daß im Gegensatz zum Verhalten eines Leiters mit dem spezifischen Widerstand $\rho = 0$ der Typ-I-Supraleiter immer feldfrei bleibt. Beim Abkühlen im konstanten Magnetfeld beginnen bei Unterschreiten der kritischen Temperatur - ohne Induktionsvorgänge - Dauerströme in der Oberfläche des Supraleiters zu fließen, die das äußere Magnetfeld verdrängen. Die Zustandsänderungen im Magnetfeld sind somit reversibel. Die Existenz des Meißner-Ochsenfeld-Effekts zeigt, daß der supraleitende Zustand nicht nur durch eine unendliche Leitfähigkeit gekennzeichnet ist, sondern auch durch das Verschwinden des magnetischen Feldes im Innern, das heißt durch den idealen Diamagnetismus.

2.1.4 Die Eindringtiefe

Die Feldverdrängung im Innern des Supraleiters kann nicht exakt bis zur Oberfläche der Probe erfolgen, da das Magnetfeld unstetig vom äußeren Feld auf Null springen müßte. Es wäre eine unendliche Stromdichte erforderlich. Dementsprechend hat das Magnetfeld eine endliche Eindringtiefe λ .

Tab.2: Eindringtiefen und Sprungtemperaturen verschiedener Supraleiter /5/

Material	T_c / K	λ / nm
Nb	9.25	32
Pb	7.20	32
Ta	4.47	35
Sn	3.72	25 - 36
In	3.41	24

2.2 Die Josephson-Effekte

Außer dem Tunneleffekt, bei dem angeregte Elektronen die Tunnelschicht durchqueren, können im Fall zweier, durch eine dünne Isolierschicht (1 bis 2 nm) getrennter Supraleiter auch Cooper-Paare durch die Isolierschicht tunneln. Mit dieser Erscheinung, dem Josephson-Effekt, ist ein Suprastrom verbunden, der keinen Spannungsabfall an der Tunnelschicht hervorruft. Die Strom-Spannungs-Charakteristik eines solchen Josephson-Kontaktes aus zwei gleichen Supraleitern ist in Abb. 6 schematisch dargestellt.

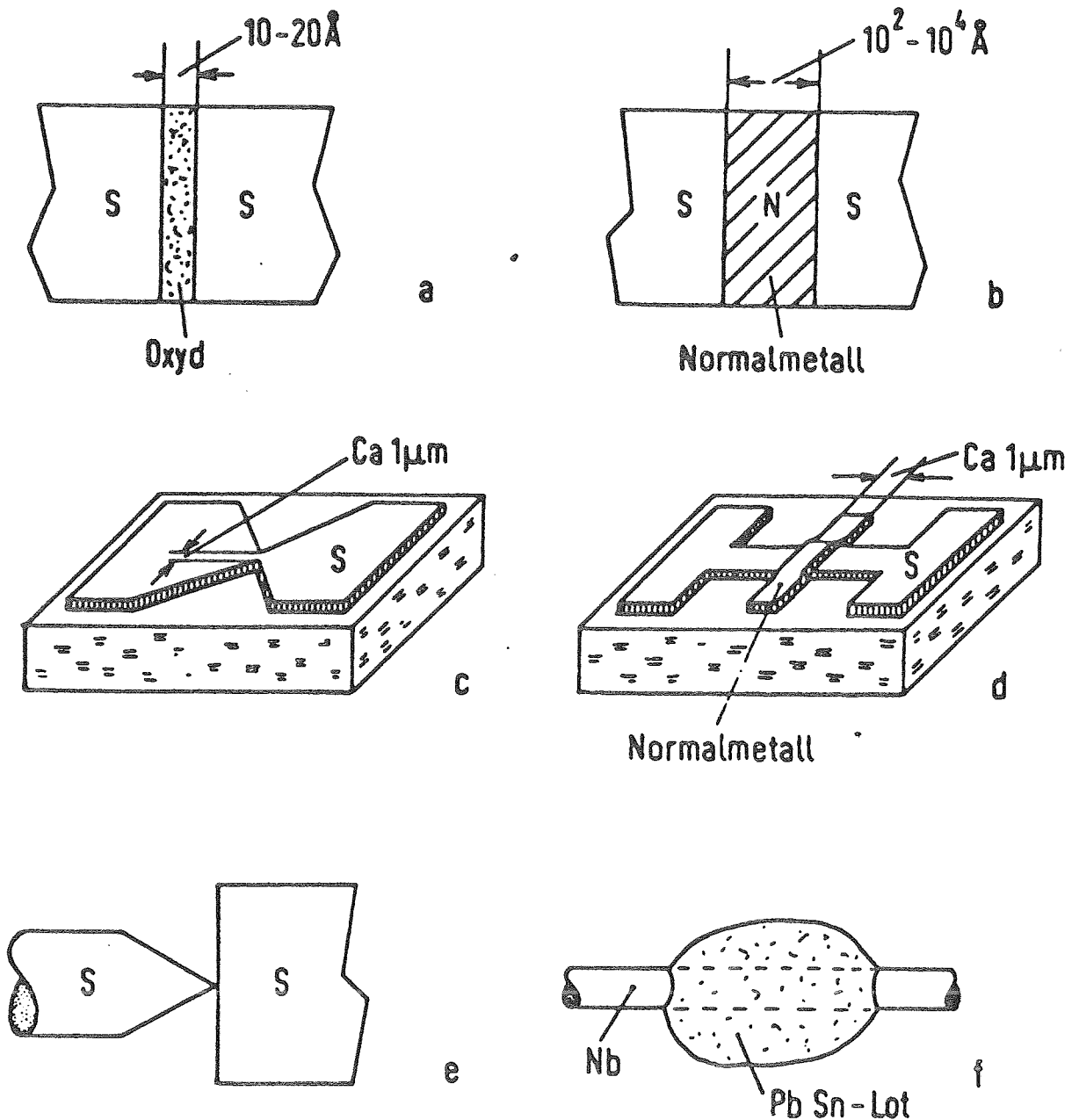


Abb. 5: Schematische Darstellung von Möglichkeiten zur Herstellung einer schwachen Kopplung zwischen zwei Supraleitern. a) Oxidschicht; b) SNS-Kontakt; c) Filmbrücke; d) Doppelschichtkontakt; e) Punktkontakt; f) Mehrfachkontakt. /3/

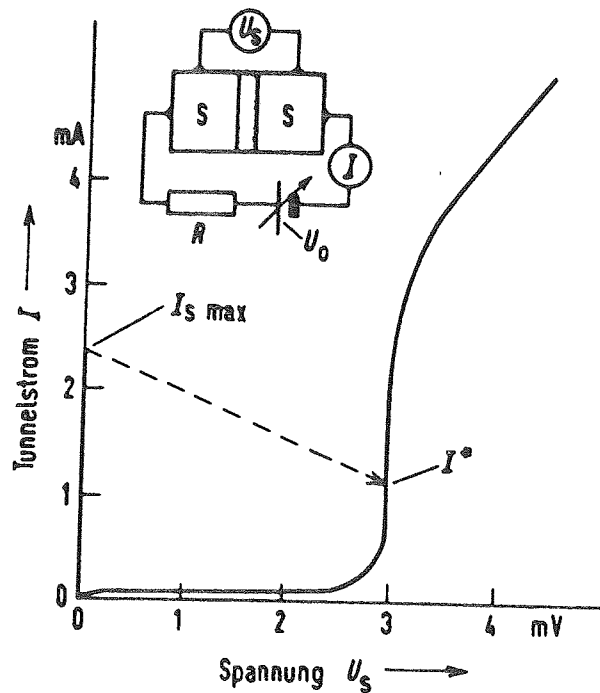


Abb. 6: Stromstärke-Spannungskennlinie eines Josephson-Tunnelkontaktes aus gleichen Supraleitern S. Der Widerstand R bestimmt das Verhalten des Kontaktes beim Auftreten der Instabilität sowie die Stromstärke $i/3$.

Die Richtung des Suprastroms wird durch die Polung der Spannung U_0 im äußeren Kreis vorgegeben. Der Josephson-Strom kann durch Vergrößern von U_0 bis zu einem Maximalwert gesteigert werden. Bei weiterer Zunahme von U_0 tritt eine Spannung am Kontakt auf, es wird $U_s \neq 0$. Die Stromstärke springt auf einen Punkt der Kennlinie, dessen Lage durch den Widerstand R im äußeren Kreis bestimmt wird.

2.2.1 Gleichstrom-Josephson-Effekt

Die für die praktische Anwendung der Josephson-Kontakte bedeutendste Eigenschaft des Suprastroms ist dessen Beeinflussbarkeit durch kleine magnetische Felder. Wird ein homogenes äußeres Magnetfeld parallel zur Isolierschicht des Josephsonelements angelegt, so variiert der maximal mögliche kritische Tunnelstrom periodisch gemäß

$$(2) \quad i_c(\vec{B}) = i_c(0) \frac{\sin\left(\frac{\pi \Phi_j}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi \Phi_j}{\Phi_0}} .$$

ϕ_j ist der vom Magnetfeld in der ganzen Tunnelanordnung (Kontaktbereich) erzeugte magnetische Fluß, und ϕ_0 das elementare Flußquant; es gilt:

$$(3) \quad \phi_0 = \frac{h}{2e} .$$

Den Verlauf von i_c in Abhängigkeit von \vec{B} zeigt Abb. 7.

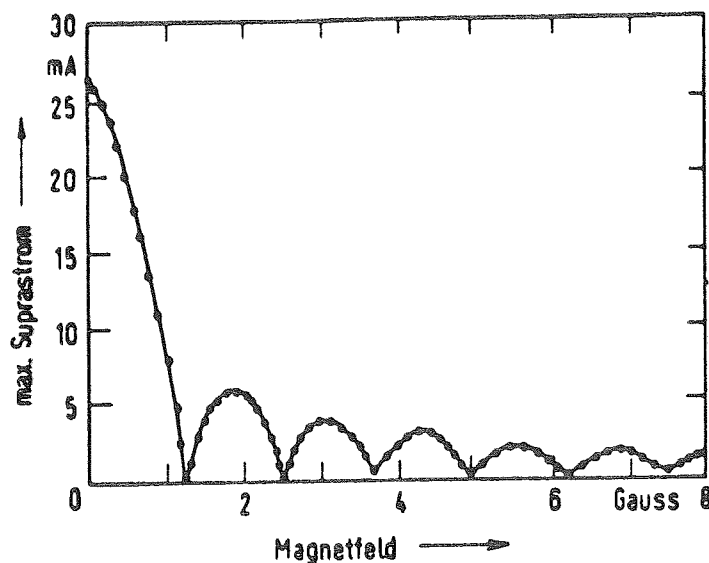


Abb. 7: Abhängigkeit des maximalen Josephson-Gleichstroms von einem Magnetfeld parallel zur Isolierschicht /6/

Werden zwei Josephson-Tunnelelemente mit supraleitenden Verbindungen parallel geschaltet, so folgt der maximale Tunnelstrom durch die beiden Elemente in Form zweier charakteristischer Perioden in Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld (parallel zu den Isolierschichten) der Beziehung:

$$(4) \quad I_c(\vec{B}) = 2 i_c(0) \frac{\sin\left(\frac{\pi\phi_j}{\phi_0}\right)}{\frac{\pi\phi_j}{\phi_0}} \cos\left(\frac{\pi\phi_a}{\phi_0}\right)$$

Hierbei ist die eine Periode wieder mit dem Fluß ϕ_j durch die Elemente im Kontaktbereich A_j selbst, die andere, viel kleinere, mit dem äußeren Fluß ϕ_a , der vom Kreis der Elemente eingeschlossen wird, verknüpft.

2.2.2 Wechselstrom-Josephson-Effekt

Die beiden Supraleiter eines Josephson-Elementes sind durch den Austausch von Cooper-Paaren miteinander gekoppelt. Die Kopplung ist jedoch sehr schwach, da die Wahrscheinlichkeit für das Tunneln von Paaren selbst durch eine sehr dünne Isolierschicht sehr gering ist. Indes verändern sich die Zustände beider Systeme durch die Kopplung. Dabei ist die Phasendifferenz zwischen den Systemen entscheidend für die Größe und die Richtung des Austausches von Cooper-Paaren. Für einen Tunnelkontakt erhält man

$$(5) \quad i_s(t) = I_0 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Hierin ist I_0 der maximale Josephson-Gleichstrom durch den Kontakt. Die Stromstärke ist nur durch die Eigenschaften der Isolierschicht (z. B. Breite und Höhe der Barriere) bestimmt. φ_1 und φ_2 sind die Phasen der beiden Cooper-Paar-Systeme links und rechts von der Barriere. Liegt nun eine elektrische Spannung $u(t)$ am Kontakt, so bedeutet dies für die Cooper-Paar-Systeme eine Energiedifferenz $\Delta E = 2 * e * u$, die nach den Regeln der Quantenmechanik zu einer zeitlichen Änderung der Phasendifferenz $\Delta\varphi(t)$ gemäß

$$(6) \quad 2 * e * u(t) = h * \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} = h * f(t)$$

führt. Wenn die beiden Systeme mit verschiedenen, aber zeitlich konstanten Frequenzen schwingen, so ändert sich die Phase zwischen beiden linear mit der Zeit.

Die Phasendifferenz beträgt

$$(7) \quad \Delta\varphi = 2 * \pi * f_0 * t = 2 * \pi * \frac{2 * e * U_0}{h} * t$$

Zur Zeit $t = 0$ gilt $\Delta\varphi = 0$. U_0 ist die Klemmenspannung am Josephson-Kontakt. Da die Phasendifferenz linear mit der Zeit zunimmt, muß entsprechend (6) in dem Kontakt ein Wechselstrom fließen. Für ihn gilt

$$(8) \quad i_s(t) = I_0 * \sin(2 * \pi * f_0 * t) .$$

Die Frequenz dieses Wechselstroms wird also von der Spannung U_0 bestimmt, die an dem Element anliegt.

2.3 SQUIDS

Für das Verständnis eines Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID) ist es entscheidend, sich klarzumachen, wie ein solcher supraleitender Ring mit einer oder zwei " weak links " (Schwachstellen) auf ein von außen angelegtes Magnetfeld reagiert. Dazu wird die Variation des magnetischen Flusses Φ_i durch den Ring in Abhängigkeit vom Außenfeld \vec{B}_a betrachtet. Ein Ring ohne den Bereich schwacher Kopplung schirmt das Außenfeld solange ab, bis der kritische Strom des Supraleiters erreicht wird. Bei weiterer Steigerung von \vec{B}_a tritt magnetischer Fluß in den Ring ein.

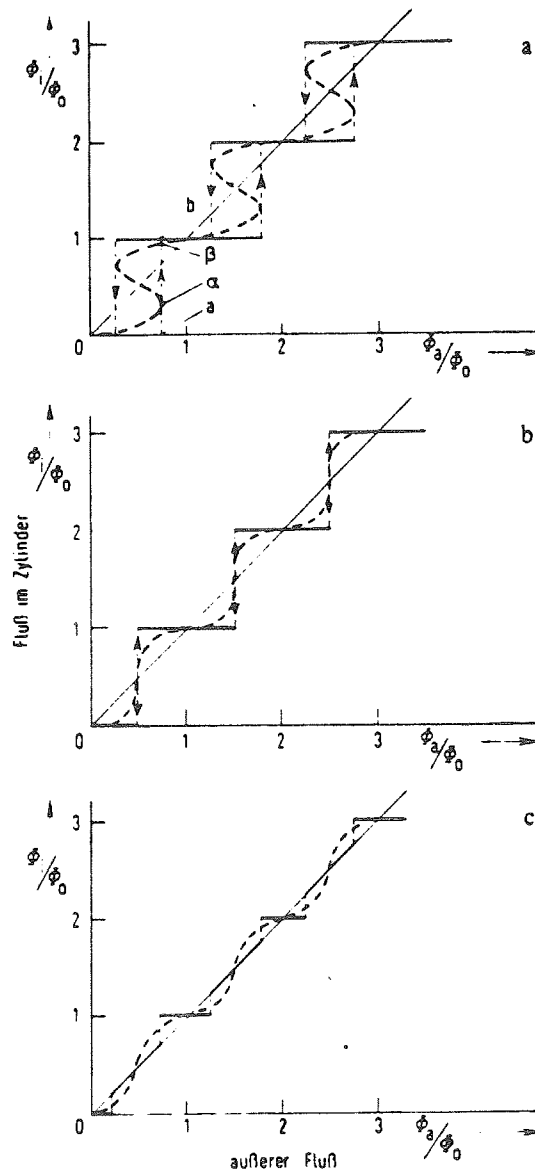


Abb.8: Magnetischer Fluß in einem Ring mit einem Bereich schwacher Kopplung /3/

- - - Verlauf für einen Josephson-Kontakt

Der Bereich schwacher Kopplung wird von einem sehr viel kleineren kritischen Strom als der übrige Supraleiter durchflossen. Dadurch ermöglicht er schon bei sehr kleinen Feldern \vec{B}_a ein Eindringen des magnetischen Flußes in den Ring. Bei den damit möglichen kleinen Variationen des Flußes im Ring wird die Quantisierungsbedingung sichtbar, indem eine ausgeprägte Struktur in der $\Phi_1(\vec{B}_a)$ -Abhängigkeit auftritt. Diese Struktur kann zur Erzeugung elektrischer Signale und damit zur Messung sehr kleiner Änderungen des Feldes verwendet werden.

Für die Φ_1 -Variation ist neben der Flußquantisierung nicht allein der kritische Strom, sondern auch das spezielle Strom-Spannungs-Verhalten der Schwachstelle wichtig. Für alle Überlegungen ist das Flußquant Φ_0 die entscheidende Größe. Es ist daher zweckmäßig, sowohl Φ_1 als auch das äußere Feld Φ_a auf Φ_0 zu beziehen.

In den drei Teilbildern 8a - c beträgt der maximale Fluß jeweils $L * i_c$.

$$\text{a: } L * i_c = 3 * \Phi_0 / 4$$

$$\text{b: } L * i_c = \Phi_0 / 2$$

$$\text{c: } L * i_c = \Phi_0 / 4$$

Wächst der äußere Fluß von Null aus an (Abb. 8a), so wird in dem Ring ein Abschirmstrom i_s angeworfen, der das Zylinderinnere gegen das Eindringen von Fluß abschirmt. Bis zum Erreichen des kritischen Stromes i_c ist Φ_1 null. Beim Überschreiten dieses Wertes wird ein Flußquant in den Ring eingekoppelt. Der Ring geht in den nächsten Quantenzustand mit einem Flußquant im Innern über. In diesem Zustand fließt der Suprastrom so, daß er den Außenfluß auf ein Flußquant verstärkt. Bei weiterer Steigerung des äußeren Flußes fällt der Suprastrom im gleichen Quantenzustand ab. Bei $\Phi_a = \Phi_0$ verschwindet der Suprastrom. Nun beginnt eine periodische Wiederholung. Beim Absenken des äußeren Flußes tritt eine Hysterese ein.

Für einen idealen Josephson-Kontakt kann die gestrichelte Kurve angenommen werden. Wegen der Phasenbeziehungen am Josephson-Kontakt kann der innere Fluß von den Werten $m * \Phi_0$ ($m = 1,2,3\dots$) abweichen. Der innere Fluß bestimmt die Phasendifferenz über dem Kontakt und damit den Josephson-Strom.

Abb. 8b zeigt, daß der supraleitende Ringstrom die einzelnen Quantenzustände mit $\Phi_1 = m * \Phi_0$ gerade bis $\Phi_0/2 = \Phi_a - \Phi_1$ stabil hält. Bei Zu- und Abnahme des äußeren Flußes tritt keine Hysterese auf.

Bei noch kleineren kritischen Strömen (Abb. 8c) schmiegt sich die Φ_0 -Abhängigkeit noch enger an die Gerade $\Phi_i = \Phi_a$. Für einen vollständig isolierten Kontakt ergibt sich die durchgezogene Kurve. Wesentlich für die Funktion eines SQUIDs ist die Flußänderung um ein Flußquant. Hierzu sollte der kritische Strom i_c größer als $\Phi_0/2L$ sein. Bei zu großem kritischen Strom können Flußsprünge mit mehreren Quanten erfolgen. Die scharfen Änderungen des inneren Flußes werden in Spannungssignale umgewandelt. Hierzu bringt man den Ring in die Spule eines Resonanzkreises.

Der gesamte äußere Fluß, den das SQUID detektiert, ist die Summe aus dem Fluß Φ_g des zu messenden Gleichfeldes und dem Fluß des Wechselfeldes.

$$(9) \quad \Phi_a = \Phi_g + \Phi^* \sin(\omega_R t)$$

Die Feldänderungen, welche mit einem SQUID gemessen werden sollen, können diesem mit einem Flußtransformator zugeführt werden. Der Flußtransformator ist im einfachsten Fall eine Drahtschleife. Jede Flußänderung in einem Teil der Drahtschleife führt zu Abschirmströmen, die in anderen Teilen der Schleife einen magnetischen Fluß erzeugen. Hierbei muß der Gesamtfluß durch die supraleitende Schleife konstant bleiben.

Es ergibt sich folgendes Ausgangssignal:

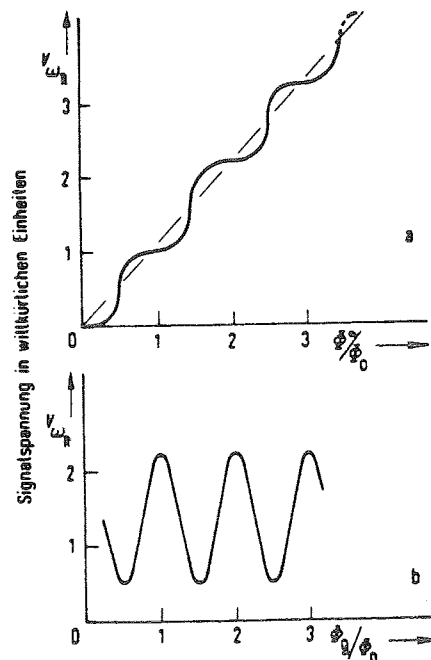


Abb.9: Signalspannung eines SQUIDs als Funktion a) der Wechselfeldamplitude, b) des Gleichfeldes /3/

2.3.1 RF-SQUIDS

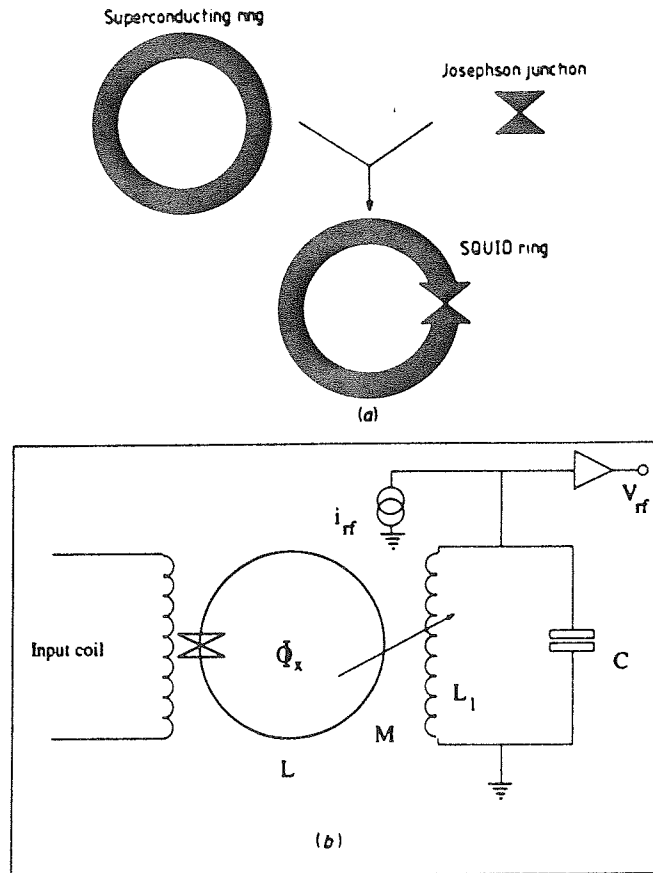


Abb.10: (a) Prinzipskizze eines SQUID - Rings, (b) schematische Darstellung eines RF-SQUIDS /4/

Unter einem RF-SQUID versteht man einen supraleitenden Ring mit einer Schwachstelle. Es wird der Wechselstrom-Josephson-Effekt genutzt.

Die Versorgung des Schwingkreises erfolgte bisher mit HF-Spannungen von ca. 20 MHz. Neueste Erkenntnisse zeigen, daß beim Erhöhen der Frequenz auf ca. 180 MHz das Flußrauschen um eine Zehnerpotenz auf $5 \cdot 10^{-5} \Phi_0 \cdot \text{Hz}^{-0.5}$ herabgesetzt wird /7/.

2.3.2 DC-SQUIDS

Der prinzipielle Unterschied zwischen RF-SQUIDS und DC-SQUIDS besteht darin, daß letztere 2 Schwachstellen im supraleitenden Ring aufweisen. Bei einem DC-SQUID wird der Gleichstrom-Josephson-Effekt genutzt. Der versorgende Gleichstrom I_0 teilt sich in zwei Strompfade auf. Beim Anlegen eines äußeren magnetischen Feldes wird magnetischer Fluß in dem Ring induziert, der einen " Ringstrom " erzeugt.

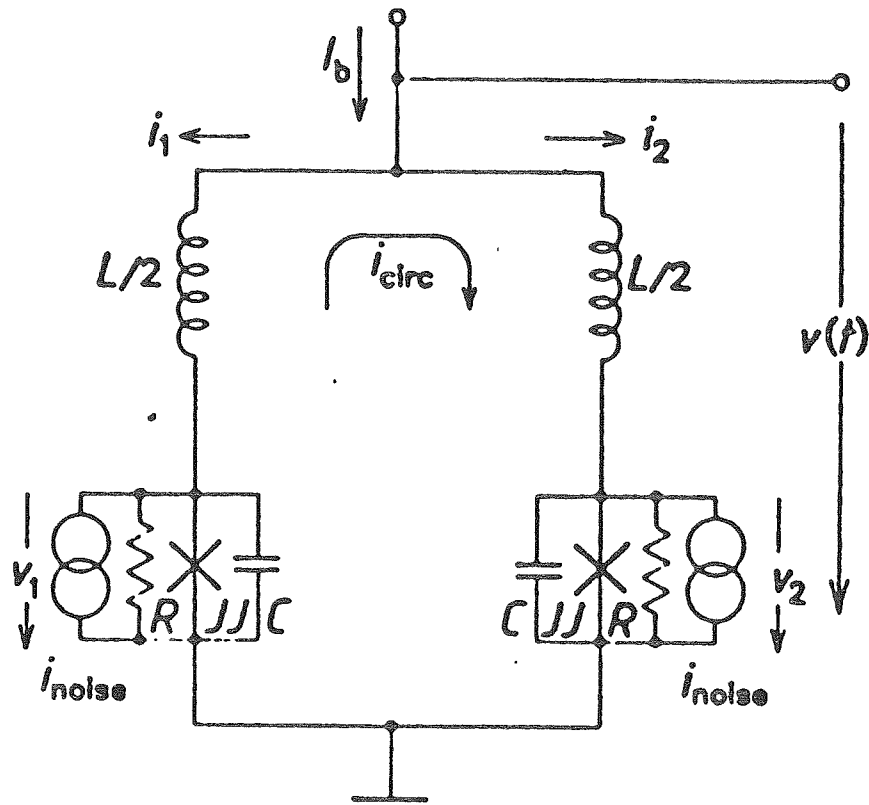


Abb.11: Schematischer Stromablaufplan eines DC-SQUIDs /8/

Damit eine genauere Analyse des SQUID-Rings möglich ist, teilt man ihn in 2 Strompfade auf, deren einzelne Ausgangssignale zu einem gesamten Ausgangssignal überlagert werden. Der schematische Stromablaufplan zeigt, daß das Ausgangssignal $v(t)$ bzw. der Strom I_b aus einer Überlagerung der Ströme i_1 und i_2 resultiert. Befindet sich der DC-SQUID in einem Magnetfeld, so wird ein Strom i_{circ} in dem Kreis angeworfen. Vereinfacht kann dieser Meßvorgang als Differenzmessung bezeichnet werden. Bei einer weitgehendst symmetrischen Bauform ist es möglich, die Rauscheinflüsse der verwendeten Bauelemente zu kompensieren, so daß im Gegensatz zu einem RF-SQUID mit einem DC-SQUID ein höheres Auflösungsvermögen erzielt werden kann. Anhand des Stromablaufplans ist ein Vergleich mit einem Differenzmeßverstärker durchführbar.

Üblicherweise wird ein DC-SQUID aus Niob und Nioboxid als planartechnisches Bauelement hergestellt. Abb.12 zeigt einen solchen SQUID. Wie zu erkennen ist, wurde der SQUID-Ring als acht ausgebildet. Aufgrund dieser Konstruktion wird lediglich die Änderung des zu messenden magnetischen Feldes bestimmt. Durch diese "Gradientenmessung" werden die äußeren Störeinflüsse gegenseitig aufgehoben, so daß lediglich eine magnetische Differenzmessung des äußeren, zu messenden magnetischen Feldes erfolgt.

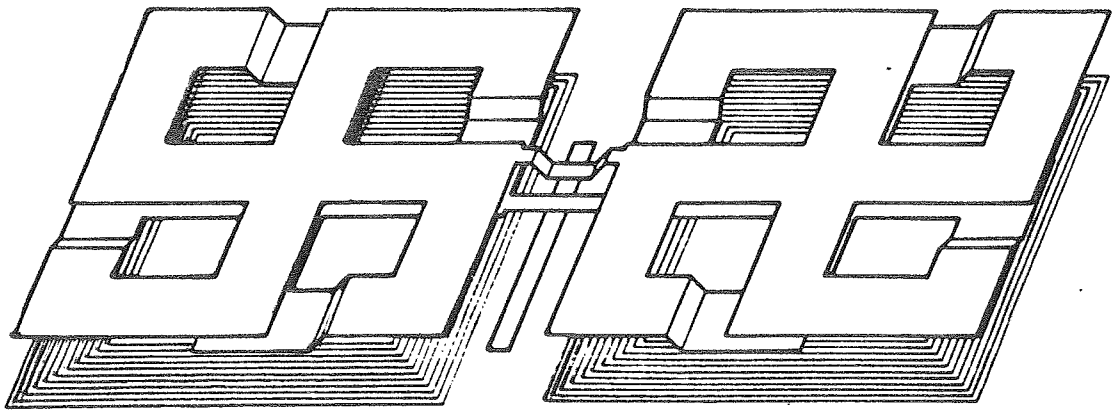


Abb. 12: DC-SQUID als planartechnisches Bauelement /9/

2.4 Der Strahlstrom-Transformator

2.4.1 Physikalische Grundlagen

Die bewegten Ladungen des Ionenstrahls erzeugen ein geschlossenes magnetisches Feld \vec{H} senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Strahls (Abb.13).

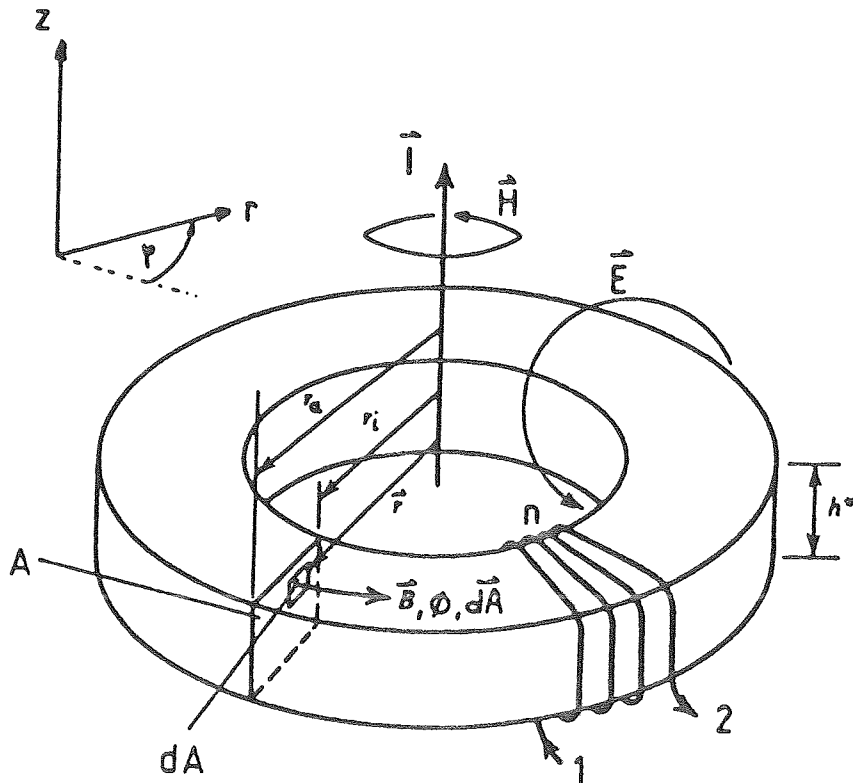


Abb.13: Physikalisches Modell eines Strahl-Transformators mit Ringkern /10/

Mit dem 1. Maxwell'schen Gesetz in integraler Form (Durchflutungsgesetz) läßt sich das magnetische Feld als Funktion des Abstandes von der Strahlachse beschreiben.

$$(9) \quad \oint_{(A)} \vec{H} \, d\vec{s} = \int_A \vec{i} \, d\vec{A}$$

Da der Strom- und der Normalenvektor des Flächenelements $d\vec{A}$ senkrecht zueinander stehen und eine homogene Stromverteilung über A angenommen werden kann, ergibt sich:

$$(10) \quad \int i \, dA = I_{ges}$$

Falls \vec{H} und $d\vec{s}$ auf dem Integrationsweg stets die gleiche Richtung haben, speziell wenn der Weg ein konzentrischer Kreis ist, läßt sich schreiben:

$$(11) \quad \oint_{(A)} \vec{H} \, d\vec{s} = H 2 \pi r = I_{ges}$$

Liegt ein weichmagnetischer Ringkern um den Strahl, so wird in ihm eine magnetische Flußdichte erzeugt.

$$(12) \quad \vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$$

Das 2. Maxwell'sche Gesetz besagt, daß eine magnetische Flußdichte ein elektrisches Wirbelfeld zur Folge hat, welches der Änderung der magnetischen Induktion entgegengerichtet ist.

$$(13) \quad \oint_{(A)} \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \, d\vec{A}$$

Da \vec{B} und $d\vec{A}$ stets parallel verlaufen (Abb.14), ergibt sich:

$$(14) \quad \oint_{(A)} \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \, d\vec{A} = - \frac{d\Phi}{dt} .$$

Wird ein elektrischer Leiter, z.B. in Form einer Drahtschleife um den durchfluteten Ringkern gebracht, läßt sich damit eine Spannung abgreifen. Wird angenommen, daß die Drahtschleife in Richtung des elektrischen Feldes liegt, sind \vec{E} und $d\vec{s}$ parallel. Falls n

Windungen durchflutet werden, ergibt sich:

$$(15) \quad U_{ind} = -n \frac{d\Phi}{dt} = \int_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Um den Gesamtfluß im Kern zu berechnen, müssen die Teilflüsse in den einzelnen Flächenelementen aufsummiert werden.

$$(16) \quad \Phi = \int_A B_r \, dA = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^h B_r \, dr \, dz$$

$$\Phi = \frac{\mu_o \mu_r I}{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^h \frac{dr}{r} \, dz$$

$$(17) \quad \Phi = \frac{\mu_o \mu_r I h^*}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$(18) \quad \Phi_1 = LI$$

Den Zusammenhang zwischen eingprägtem Strom und dem magnetischen Fluß gibt (18). Der Proportionalitätsfaktor L ist als Eigeninduktivität des magnetischen Kreises definiert. Er ist eine werkstoff- und geometrieabhängige Größe.

Im Sekundärkreis erzeugt I_2 , der den Kern n mal umfließt, den Fluß

$$(19) \quad \Phi_2 = n \frac{\mu_o \mu_r h^*}{2\pi} I_2 \ln \frac{r_a}{r_i} .$$

Dessen zeitliche Änderung induziert nach (15) die Gegenspannung

$$(20) \quad U_{ind2} = -n \frac{n \mu_o \mu_r h^*}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \frac{dI_2}{dt} .$$

Hieraus ergibt sich die Eigeninduktivität einer Spule mit Ringkern nach (18) als Funktion der Windungszahl:

$$(21) \quad L_2 = \frac{n^2 \mu_o \mu_r h^*}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Üblicherweise werden Ringkerne mit dem Induktivitätsfaktor (A_L -Wert) beschrieben. Dieser Koeffizient beinhaltet die Geometrie und den Werkstoff (also die Permeabilität) des Ringkerns. Der Vorteil hierbei ist, daß die Induktivität einer Spule mit solch einem Kern, für den der Induktivitätsfaktor bekannt ist, sehr leicht bestimmt werden kann:

$$(22) \quad L = A_L n^2 .$$

2.5 Das Meßprinzip eines Kryo-Strahlstrom-Komparators

Das gleiche Meßprinzip, wie es bei einem Strahlstrom-Transformator zur Anwendung kommt, wird bei einem Kryo-Strom-Komparator genutzt.

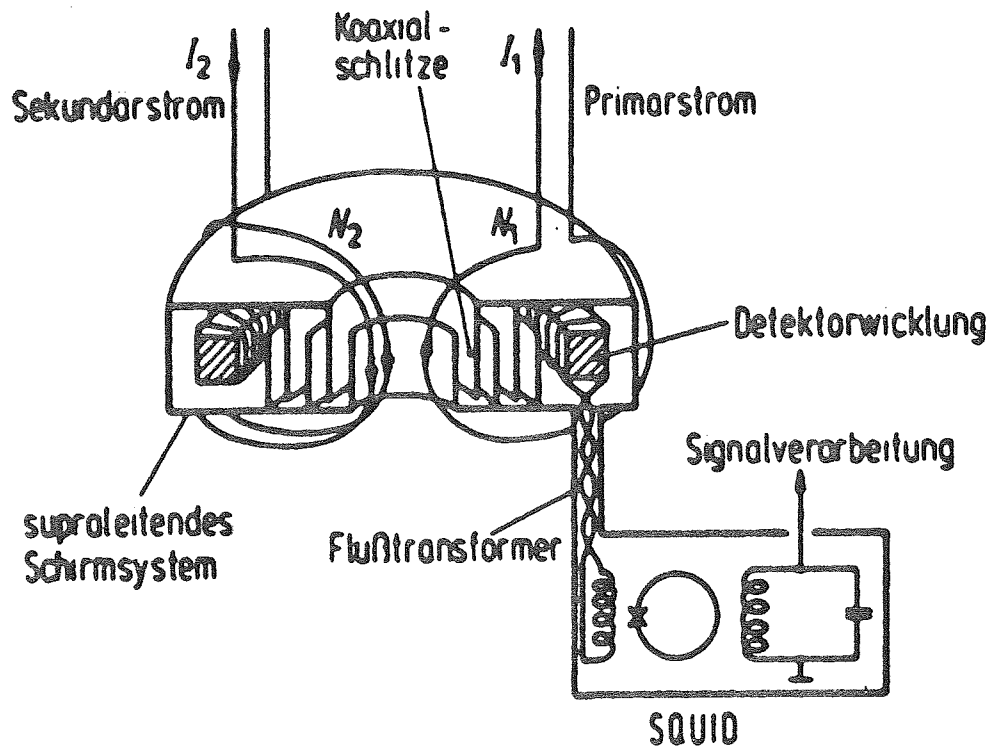


Abb. 14: Kryo-Strom-Komparator mit SQUID als Nulldetektor /11/

Abb.14 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines torodialen Kryo-Strom-Komparators. Die elektrischen Durchflutungen der Windungen N_1 und N_2 der Wicklungen erzeugen in der im Schirminneren befindlichen Detektorwicklung Signale, wobei die Signalübermittlung über die koaxialen, von supraleitenden Flächen begrenzten Schlitze im Schirm erfolgt.

Bei rotationssymmetrischer Bauweise des Komparators können nur die azimutalen Feldkomponenten fast ungedämpft in das Innere des Detektors gelangen. Die azimutale Feldkomponente wird aufgrund des Meißner-Ochsenfeld-Effekts entlang der mäanderförmigen Geometrie der Schirmbleche vom Eingang des Schirmsystems bis zur Detektorspule geführt. Die anderen Feldanteile werden entsprechend der Schirmgeometrie geschwächt (siehe 4.6). Das von der Detektorspule aufgenommene Signal wird über eine supraleitende Spule und einen Anpaßtransformator der Eingangsspule des SQUIDs als Meßsignal übermittelt. Der Anpaßtransformator ist nur dann notwendig, wenn die Induktivität der Detektorspule und die SQUID-Eingangsimpedanz unterschiedlich sind. Durch die unterschiedlichen Induktivitäten ist keine optimale Anpassung des Detektors an das SQUID möglich. Da das SQUID ein Kaufteil ist, kann an dessen Parametern nichts verändert werden. Durch die erhöhte Induktivität im Eingangskreis des SQUIDs stimmt die Gegenkopplungsinduktivität nicht mit der überein, welche bei der Dimensionierung des SQUIDs angenommen wurde. Deshalb arbeitet der Schwingkreis, welcher für die Funktion des SQUIDs notwendig ist, nicht mehr in Resonanz. Als Folge davon würde das SQUID-Ausgangssignal nicht moduliert und damit unbrauchbar.

Das verstärkte und modulierte Ausgangssignal des SQUIDs kann über eine weitere Erregerwicklung dem Strahlstrom entgegenwirken. Im einfachsten Fall kann diese Erregerwicklung ein stromdurchflossener Draht sein. Mit dieser Gegenkopplung wird mit dem Meßsystem lediglich eine Differenzmessung zwischen dem Strahlstrom und dem Gegenkopplungsstrom vorgenommen. Das Meßsystem arbeitet dann als Nulldetektor.

2.6 Störquellen

2.6.1 Einfluß paramagnetischer Ionen auf den Supraleiter

Beim Bau des für das Meßsystem notwendigen Kryostaten muß darauf geachtet werden, daß kein flüssiger Stickstoff verwendet wird. Flüssiger Stickstoff enthält $5 \cdot 10^{-4}$ Volumen % flüssigen Sauerstoff. Dieser Sauerstoff kann zwar nicht direkt mit den Supraleitern wechselwirken, jedoch wären die durch die Bewegungen des paramagnetischen Sauerstoffs erzeugten Magnetfelder eine nicht zu unterschätzende Störquelle in direkter Nähe des Meßsystems.

2.6.2 Elektromagnetische Effekte

Aufgrund der hohen Auflösung des Meßsystems, welche bis in den Bereich von 10^{-14} T reicht, sind verschiedene Störeinflüsse möglich:

- Störung oder Verfälschung des Meßsignals durch Einstreuung magnetischer Felder aus Ablenkmagneten, Getterpumpen oder stromführenden Netzleitungen in den Trafokern, die Signalleitungen oder die Meßelektronik;
- Einstreuung des Erdmagnetfeldes;
- Brummstörungen durch Erdschleifen.

2.6.3 Thermisches Rauschen der Spule

Eine verlustbehaftete Spule läßt sich bei einer gegebenen Frequenz f entweder durch die Reihenschaltung einer idealen Induktivität L_R mit einem Verlustwiderstand R_R oder aber durch die gleichwertige Parallelschaltung einer idealen Induktivität L_P mit einem Verlustwiderstand R_P beschreiben.

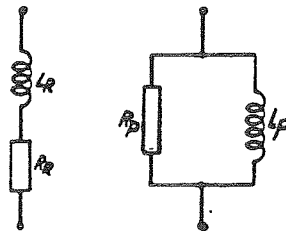


Abb.15: Reihen- und Parallelersatzschaltbild einer verlustbehafteten Spule

Man kann die Rauschquelle eines Wirkwiderstandes als Rauschspannungsquelle in Reihe mit dem Wirkwiderstand oder als Stromquelle parallel zum Wirkwiderstand darstellen.

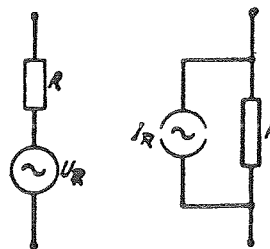


Abb.16: Darstellung eines rauschenden Widerstandes mit Rauschspannungs- oder Rauschstromquelle

Da es sich um statistische Fluktuationen mit dem arithmetischen Mittelwert null handelt, kennzeichnet man ihre Größe durch das mittlere Rauschspannungsquadrat bzw. dem mittleren Rauschstromquadrat. Nach Nyquist liefert der im allgemeinen frequenzabhängige Wirkwiderstand $R(f)$ in dem differentiell kleinen Frequenzband df den Rauschbeitrag:

$$(23) \quad u_{\omega}^2 d\omega = 4 k_B T R(f) df$$

bzw.

$$(24) \quad u_{\omega}^2 d\omega = \frac{2}{\pi} k_B T R(\omega) d\omega .$$

Hieraus ergibt sich der Rauschstrom zu

$$(25) \quad i_{\omega}^2 d\omega = \frac{u_{\omega}^2 d\omega}{R^2} .$$

Für eine Spule mit Eisenkern ist R nach Abb.15 durch den komplexen Widerstand Z zu ersetzen.

$$(26) \quad Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2$$

Somit ergibt sich mit (25) und (26):

$$(27) \quad i_{\omega}^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{k_B T R d\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Betrachtet man das Rauschen nicht für das Frequenzintervall df bzw. $d\omega$, sondern für den ganzen Frequenzbereich $0 \rightarrow \infty$, so erhält man:

$$(28) \quad \overline{i_r^2} = \frac{2}{\pi} \frac{k_B T}{R} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}} d\omega .$$

Das Integral hat die Lösung

$$(29) \quad \overline{i_r^2} = \frac{2}{\pi} \frac{k_B T}{R} \left[\left(\arctan \frac{\omega L}{R} \right) \frac{R}{L} \right]_0^{\infty} .$$

Nach dem Einsetzen der Grenzen folgt schließlich

$$(30) \quad \overline{i_r^2} = \frac{2}{\pi} \frac{k_B T}{R} \frac{R}{L} \frac{\pi}{2} = \frac{k_B T}{L}$$

Ersetzt man L durch

$$(31) \quad L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}}$$

und führt die Rauschfeldstärke

$$(32) \quad H_r = \frac{I_r}{l_{Fe}} N$$

sowie das Kernvolumen V_{Fe}

$$(33) \quad V_{Fe} = l_{Fe} A_{Fe}$$

ein, so erhält man für die Rauschfeldstärke:

$$(34) \quad H_{eff} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_{LR} A l}} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_{LR} V}}$$

Mit dem Biot-Savartschen Gesetz läßt sich nun das effektive Stromrauschen δI_{eff} aus der effektiven Rauschfeldstärke bestimmen.

Mit dem mittleren Radius des magnetischen Ringes R

$$(35) \quad R = \frac{d_a - d_i}{4} + \frac{d_i}{2}$$

und dem Kernvolumen V_{Fe}

$$(36) \quad V_{Fe} = h * \pi R^2 \frac{d_a - d_i}{2}$$

ergibt sich das effektive Stromrauschen zu:

$$(37) \quad \delta I_{eff} = H_{eff} 2 R$$

Die effektive thermische Rauschfeldstärke ist unabhängig von der Größe der Kernverluste und unabhängig davon, ob der Kern bewickelt ist oder nicht.

2.6.4 Sonstige Störgrößen

Folgende Störungen können ebenfalls auf das Meßsystem bzw. auf das Meßsignal einwirken:

- Ungleichmäßigkeit des Ringkerns, so daß verschiedene Permeabilitäten entlang des Umfangs auftreten;
- Zeitliche Veränderung von Werkstoffeigenschaften infolge Bestrahlung mit schnellen Neutronen;
- Zeitliche Veränderung von Werkstoffeigenschaften durch Temperaturwechsel;
- Verschlechterung der magnetischen Eigenschaften des Trafokerns;
- Schwankende Temperaturen;
- Fehlmessung durch den vom Ionenstrahl influenzierten Wandstrom sowie nieder- und hochfrequente Ausgleichsströme auf dem Strahlrohr;
- Der Kryostat wird mit einem Refrigerator vorgekühlt. Desweiteren dient der Refrigerator zum Kühlen des thermischen Schildes anstelle eines flüssigen Stickstoffbades. Das Problem hierbei ist, daß der Refrigerator mechanische Schwingungen verursacht, die sich störend auf den Meßvorgang auswirken können.

3. Anforderungen an das Meßsystem

3.1 Meßtechnische Anforderungen

Für eine qualitative Analyse des Strahlstroms, welcher vom Synchrotron zu den verschiedenen Experimentierplätzen transportiert wird, ist ein Meßgerät notwendig, das den Strahlstrom möglichst zerstörungsfrei in ein proportionales Meßsignal umwandelt.

Aufgrund der verschiedenen Ionensorten, Stromintensitäten sowie der unterschiedlichen Längen der Stromimpulse entstehen Forderungen an das Auflösungsvermögen und die Meßdynamik. Weiter wird gefordert, daß das Schirmsystem alle äußeren Felder wie Dipol- und Quadrupolfelder, welche aufgrund des Strahlführungssystems bei der GSI vorhanden sind, soweit abschwächt, daß sie keinen Einfluß auf das Meßsignal haben.

Folgende Richtwerte wurden festgelegt:

Tab.3: Meßtechnische Anforderungen

untere Stromauflösungsgrenze	1 nA
Bandbreite	1 kHz
Reaktionszeit	< 1 ms
Abschwächung der äußeren magnetischen Felder, die nicht detektiert werden sollen	<10 ⁻⁹

Diese Anforderungen können mit einer Abgriffspule, einem DC-SQUID und der entsprechenden Auswerteelektronik erfüllt werden. Der Strahlstrom besteht aus Ionen, die ein elektromagnetisches Feld erzeugen. Durch die Auswertung dieser azimuthalen magnetischen Feldkomponente erhält man ein dem Strahlstrom proportionales Signal, ohne dem Strahl nennenswert Energie zu entziehen. Der Meßvorgang hat also fast keine Rückwirkung auf den Strahl.

Ein späteres Umrüsten des Strahlstrom-Transformators zu einem Differenzmeßgerät sowie eine Kalibriermöglichkeit sollen vorgesehen werden. Mit Hilfe der Differenzmessung wird das Meßsystem zu einem Nulldetektor, wodurch das Auflösungsvermögen weiter erhöht werden kann.

Es besteht weiterhin die Notwendigkeit, sämtliche äußeren Magnetfelder von dem Meßsystem fernzuhalten, da das SQUID Magnetfelder bis in den Bereich von 10^{-14} T auflösen kann. Das Meßsystem selbst soll Magnetfelder im Bereich 10^{-8} T bis 10^{-13} T auflösen. Statische Feldeinflüsse wie das Erdfeld ($\approx 10^{-5}$ T) können zusätzlich durch Kalibrieren kompensiert werden.

3.2 Konstruktive Anforderungen

Aus den mechanischen Abmessungen des Strahlrohrs sowie den vakuumtechnischen Anforderungen ergeben sich die Rahmenbedingungen für den Detektor und den hierzu notwendigen Heliumkryostaten.

Da das Meßsystem während des Strahlbetriebs nicht gewartet werden kann, ist eine ausreichende Standzeit des Heliumkryostaten vorzusehen.

Wegen der paramagnetischen Eigenschaften des flüssigen Sauerstoffs, welcher im flüssigen Stickstoff vorhanden ist, muß auf Vorkühlen und thermisches Abschirmen mit flüssigem Stickstoff verzichtet werden.

Das Strahlrohr muß an der Meßstelle elektrisch unterbrochen werden, um die Wandströme nicht mitzumessen.

Es ergeben sich folgende einzuhaltende Parameter:

Tab. 4: Konstruktive Anforderungen

Standzeit des Heliumkryostaten	4 Wochen
Strahlrohrinnendurchmesser	100 mm
Strahlrohr	elektrisch unterbrochen
Meßsysteminnendurchmesser	> 130 mm
Betriebsdruck des Vakuumsystems	$\leq 10^{-7}$ mbar

4. Dimensionierung des Kryo-Strahlstrom-Transformators

4.1 DC-SQUID-Meßsystem

Das SQUID-Meßsystem wird vom Institut für Festkörperphysik der Friedrich-Schiller-Universität Jena geliefert. Es trägt die Bezeichnung " SQUID CONTROL 4 " und besteht aus den folgenden Komponenten:

- * SQUID-Meßkopf,
- * Vorverstärker,
- * Steuergerät,
- * Verbindungsleitungen.

Im supraleitend abgeschirmten SQUID-Meßkopf befindet sich ein Flußtransformator zum Anpassen der Detektorinduktivität an die SQUID-Induktivität, die supraleitende Eingangsspule, der Schwingkreiskondensator, eine Leiterplatte sowie das SQUID-Element. Das SQUID-Gehäuse wird aus supraleitendem Blei hergestellt. Das SQUID-Element selbst ist zusätzlich in einer Bleiverkapselung untergebracht, die einerseits dem in Dünnschichttechnologie hergestellten SQUID-Element einen ausreichenden mechanischen Schutz bietet und andererseits für eine weitere Abschirmung magnetischer Störfelder sorgt. Die im

Meßkopf freibleibenden Klemmverbindungsstücke aus Niob dienen der supraleitenden Kontaktierung des Meßkreises an den Anpaßtransformator.

Um einen supraleitenden Übergang zu gewährleisten, sind die Niobkontaktflächen sorgfältig zu reinigen. Maganinanschlußdrähte dienen der Zuführung der für den Betrieb des SQUIDs notwendigen Ströme bzw. der Auskopplung der Signalspannung von wenigen Mikrovolt. Speziell verdrehte und geschirmte Kryokabel führen vom Meßkopf zum Vorverstärker, der sich auf dem Kryostaten befindet. Die Kryokabel werden aus PTFE-Schlauch und Manganindraht hergestellt, sorgfältig verdreht und anschließend in ein Neusilberrohr geschoben. Der Vorverstärker ist in einem HF-dichten Gehäuse in Kammertechnik untergebracht. Durch diese Maßnahme sowie durch den Einsatz von Durchführungsfiltern soll ein weitgehendst störungsfreier Betrieb des SQUIDs auch unter dem Einfluß möglicher HF-Störstrahlungen gewährleistet werden. Der Anschluß des Vorverstärkers an das Steuergerät erfolgt über ein mehrpoliges geschirmtes Verbindungskabel, über das sowohl die Versorgungsspannungen des Vorverstärkers und des SQUIDs als auch die Signalspannung geführt werden.

Das Steuergerät SQUID CONTROL 4 ist in einem Standardgehäuse untergebracht und enthält folgende Baugruppen:

- Modulationsgenerator
- Lock-in-Verstärker
- Feedback-Verstärker
- Notch-Filter
- Hoch- / Tiefpaßfilter
- Netzversorgung

sowie einen Leereinschub, z. B. für einen Analog-Digital-Wandler.

4.1.1 Betrieb des SQUID-Sensors

Der SQUID-Sensor wird mit Flußmodulation betrieben. Die quarzstabilisierte Modulationsfrequenz beträgt 125 kHz [12]. Die Auskopplung des SQUID-Signals und die Anpassung der SQUID-Impedanz an den optimalen Rauschwiderstand der Eingangsstufe des Vorverstärkers erfolgt durch einen Serien-Resonanzkreis mit supraleitender Induktivität, der parallel zum SQUID geschaltet ist. Der Schwingkreis besitzt im Arbeitspunkt des Sensors eine Güte von etwa 100, so daß eine 3 dB - Meßbandbreite von 1,25 kHz zur Verfügung

steht. Die am Kondensator des Serienkreises abgeleitete Ausgangsspannung wird in einem rauscharmen Vorverstärker verstärkt.

Nach einer weiteren Verstärkung im Steuergerät erfolgt die phasenempfindliche Gleichrichtung. Die nachgeschalteten Gleichspannungsverstärkerstufen liefern einerseits das Signal zur Rückkopplung auf den Sensor bzw. speisen andererseits die Ausgangs-Filtergruppe. Mittels der Hoch- und Tiefpaßfilter sowie dem selbstsynchronisierenden 50 Hz-Notch-Filter kann das Ausgangssignal in seiner spektralen Zusammensetzung verändert und den Erfordernissen der Meßaufgabe angepaßt werden.

4.1.2 Technische Daten

Die Tab.5 und 6 zeigen die technischen Daten des SQUID-Sensors UJ 111 und des SQUID-Steuergerätes SQUID-CONTROL 4.

Tab.5 : Technische Daten des SQUIDs UJ 111 /12/

Empfindlichkeit der Eingangsspule	$\Delta I_{st} = 0.4 \mu A / \phi_0$
Empfindlichkeit der Modulationsspule	$\Delta I_m = 20 \mu A / \phi_0$
Eingangsimpedanz	$L_{SQ} = 0.75 \mu H$
Induktivität des SQUID	$L = 50 \text{ pH}$
Kritischer Strom	$i_c = 21 \mu A$
Flußauflösung	$\alpha_{SQ} = 4 * 10^{-6} \phi_0 * \text{Hz}^{-0.5}$
Gegeninduktivität	$M_{SQ} = 5 \text{ nH}$
Koppelfaktor	$k = 0.8$

Tab.6: Technische Daten von SQUID CONTROL 4 /12/

Rauschbegrenzte Empfindlichkeit	$\phi_n = 2 * 10^{-6} \phi_0 * \text{Hz}^{-0.5}$
Analogausgang	0 . . . ± 2.5 V
Empfindlichkeit	2500 - 250 - 25 - 2.5 mV
Ausgangsfiler: - Hochpaß (3 dB Grenzfrequenz) - Tiefpaß (3 dB Grenzfrequenz)	0 - 0.01 - 0.1 - 1 - 5 Hz 16 - 40 - 100 - 500 - 1000 Hz
Netzsynchonfilter: - Dämpfung (bezogen auf 50 Hz) - Bandbreite (bezogen auf 50 Hz)	49 dB ± 0.1 bzw. ± 1 Hz
Maximale Meßgeschwindigkeit (slew rate)	ca. 10000 ϕ_0 / s
Stromversorgung	220 V / 50 Hz
Leistungsaufnahme	15 VA

4.2 Auflösungsvermögen

Der Bau von Kryo-Strom-Transformatoren mit extrem kleinen Fehlern ist nur dann sinnvoll, wenn mit dem Detektorsystem die zu erwartenden kleinsten Durchflutungen aufgelöst werden können. Die bisher höchsten Auflösungen wurden erreicht, wenn die Detektorwicklung mit einem SQUID als Nulldetektor verbunden wurde (Abb.17). Die Zusammenschaltung erfolgt über einen Flußtransformator, dessen einzelne Komponenten supraleitend sein müssen, damit auch bei Gleichstromanwendungen der Kopplungsstrom I_F nicht abklingt. Dieser Strom koppelt über die Gegeninduktivität M_{SQ} einen magnetischen Fluß ϕ_{SQ} in das SQUID, wodurch in einem mit Gleichstrom erregten Schwingkreis typische Modulationen auftreten. Eine Analyse des Ausgangssignals erlaubt dann, den eingekoppelten Fluß in Vielfachen des Flußquantums $\phi_0 = 2.07 * 10^{-15}$ Vs zu messen.

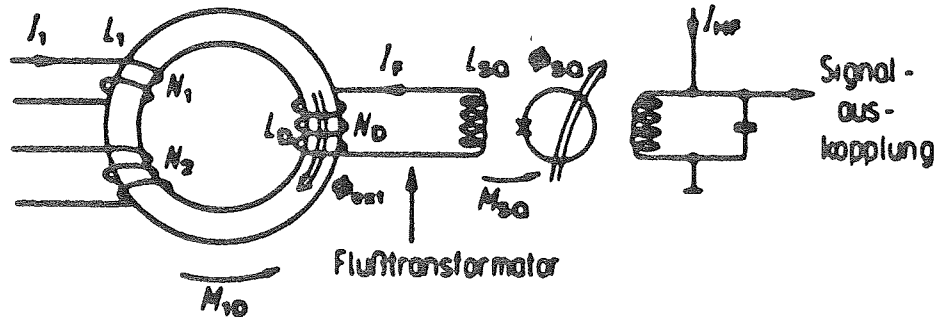


Abb.17: Anpaßtransformatorkopplung zwischen Kryo-Strom-Komparator und SQUID /11/

Der Zusammenhang zwischen dem erregenden Signal $I_{e1} = N_1 I_1$ und dem SQUID-Signal ϕ_{SQ} , gemessen in Einheiten von ϕ_0 , kann wie folgt angegeben werden:

$$(38) \quad I_{e1} = N_1 I_1 = \delta_{KSK} \frac{\phi_{SQ}}{\phi_0}$$

Der Proportionalitätsfaktor δ_{KSK} gibt an, wann die Durchflutung im SQUID gerade den Wert von einem ϕ_0 erzeugt. Diese Konstante sollte möglichst klein sein, um eine hohe Stromauflösung zu erzielen. Mit den folgenden Beziehungen für den externen Fluß und dem Fluß im SQUID

$$(39) \quad \phi_{ext} = M_{1D} I_1$$

$$(40) \quad \phi_{SQ} = M_{SQ} I_F$$

kann mit dem Gesetz der Flußerhaltung im supraleitenden Ring

$$(41) \quad \phi_{ext} = I_F (L_D + L_{SQ})$$

für die " Einheitsdurchflutung " folgender Zusammenhang hergeleitet werden:

$$(42) \quad \delta_{KSK} = \frac{N_1 (L_D + L_{SQ}) \phi_0}{M_{1D} M_{SQ}}$$

Ersetzt man die Gegeninduktivität M_{1D} durch

$$(43) \quad M_{1D} = K \sqrt{L_1 L_D}$$

erhält man für die Einheitsdurchflutung δ_{KSK}

$$(44) \quad \delta_{KSK} = \frac{(L_D + L_{SQ}) \Phi_o}{k M_{SQ} \sqrt{L_1 L_D}}$$

Führt man folgende Substitutionen durch

$$(45) \quad x^* = L_D$$

$$(46) \quad y^* = L_{SQ}$$

$$(47) \quad \sqrt{B} = \sqrt{L_1} \frac{k M_{SQ}}{\Phi_o}$$

und leitet die Einheitsdurchflutung nach dem Substituenten x^* ab, setzt diesen Ausdruck anschließend null, um das Extremum von δ_{KSK} zu ermitteln, so ergibt sich:

$$(48) \quad L_{SQ} = L_D$$

Nimmt man für den toroidalen Kern der Detektorwicklung einen rechteckigen Querschnitt mit äußerem Durchmesser d_e , innerem Durchmesser d_i und Höhe h^* , so ergibt sich mit (21) und der Permeabilität $\mu_r = 1$ (Spule im Vakuum) die Induktivität der Detektorwicklung L_D .

Es ergibt sich das Optimum der Windungszahl zu:

$$(49) \quad (N_D)_{opt} = \sqrt{\frac{L_{SQ}}{A_{L,KSK} (\mu_r = 1)}}$$

Unter der Annahme, daß der Kopplungsfaktor $k = 1$ ist und die Erregerspule annähernd die gleiche Geometrie wie die Detektorspule aufweist, kann man die Gegeninduktivität M_{1D} wie folgt ausdrücken:

$$(50) \quad M_{1D} = N_1 N_D A_{L,KSK} (\mu_r = 1)$$

Ist die Erregerwicklung, wie in diesem Fall, ein Strahlstrom, so gilt dies nur als Näherung, da vermehrt Steuerluste auftreten. Streuverluste entstehen nur durch ungleichmäßiges Wickeln der Primär- und Sekundärwicklung auf den Ringkern, so daß das von der

Primärspule erzeugte magnetische Feld direkt auf die Sekundärwicklung wirkt. Wird Abschnitt 2.6.3 berücksichtigt, so ist diese Näherung hinreichend genau. Eventuell auftretende Störeinflüsse können im Betrieb mit Hilfe einer Kalibrierung beseitigt werden. Werden in (42) (49) und (50) eingesetzt, so ergibt sich das gesuchte Optimum für die Einheitsdurchflutung zu:

$$(51) \quad (\delta_{KSK})_{opt} = 2 N_D \frac{\Phi_o}{M_{SQ}}$$

Es ist allerdings festzustellen, daß ohne einen Stoff mit hoher Permeabilität μ_r die Abmessungen der Detektorspule sehr groß werden würden, um das Optimum für $N_D = 1$ einzuhalten. Damit zum einen das Optimum $N_D = 1$ realisiert werden kann und zum anderen die Ungleichmäßigkeiten des torodialen Ringkerns ausgeglichen werden, muß die Detektorspule als Toroid um den Ringkern gelegt werden.

Um günstige Werte für die Einheitsdurchflutung zu erzielen, wird eine Detektorspule mit Kern notwendig. Aus (42) ergibt sich:

$$(52) \quad \frac{\delta_{KSK}}{\frac{\Phi_o}{M_{SQ}}} = N_D \left(1 + \frac{L_{SQ}}{L_D} \right)$$

Unter Verwendung von (22) erhält man:

$$(53) \quad \frac{\delta_{KSK}}{\frac{\Phi_o}{M_{SQ}}} = N_D \left(1 + \frac{L_{SQ}}{N_D^2 \mu_r A_{L,KSK} (\mu_r = 1)} \right) ,$$

womit sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$(54) \quad \frac{\delta_{KSK}}{\frac{\Phi_o}{M_{SQ}}} = \frac{1}{N_D} \left(N_D^2 + \frac{L_{SQ}}{\mu_r A_{L,KSK} (\mu_r = 1)} \right) .$$

Abb.18 zeigt die reduzierte Einheitsdurchflutung als Funktion der reduzierten Detektorkerneigenschaften, wobei die Detektorwindungszahl variiert wurde. Für jede Konfiguration, charakterisiert durch

$$\frac{\mu_r A_{L,KSK} (\mu_r = 1)}{L_{SQ}} ,$$

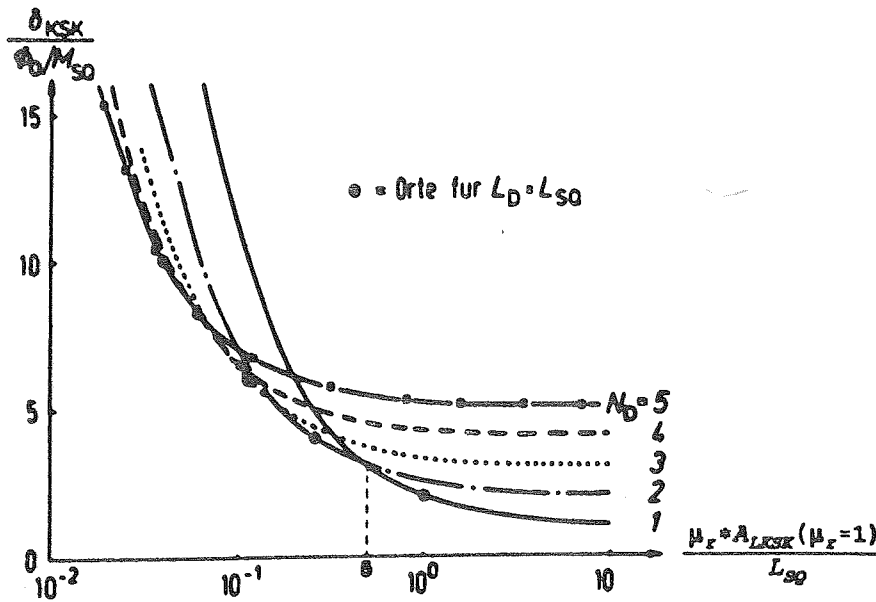


Abb.18: Reduzierte Einheitsdurchflutung als Funktion der reduzierten Detektorkerneigenschaften

gibt es eine optimale Windungszahl. Die optimale Lösung erhält man jedoch nur für bestimmte ausgesuchte Punkte, da das Kriterium $L_D = L_{SQ}$ ebenfalls erfüllt werden muß. Die Wahl von μ_r und der Abmessungen der Detektorspule ist entscheidend. Der nicht mehr zu unterschreitende Grenzwert ergibt sich zu:

$$(55) \quad \frac{\delta_{KSK}}{\mu_r \rightarrow \infty} (N_D = 1) = \frac{\phi_0}{M_{SQ}}$$

Eine sich anschließende Frage ist, welche Strom- bzw. Durchflutungsauflösung realisierbar ist.

Die Auflösung wird von der Einheitsdurchflutung δ_{KSK} und vom kleinsten Fluß $\Delta\phi_{SQ}$, der vom SQUID noch erfaßt werden kann, bestimmt. Üblicherweise gibt man diesen Wert durch das Effektivwerttauschen der Kombination SQUID-Sensor und SQUID-Vorverstärker an. Das Effektivwerttauschen wird in Einheiten von ϕ_0 gemessen und auf eine Bandbreite des Detektorsystems $\Delta f = 1$ Hz bezogen:

$$(56) \quad \Delta\phi_{SQ} = \alpha_{SQ} \phi_0 \sqrt{\Delta f}$$

Mit (31) ergibt sich hiermit die kleinste mögliche Stromauflösung ΔI , bei einem Signal Rausch-Verhältnis von 1 zu

$$(57) \quad \Delta I = \delta_{KSK} \alpha_{SQ} \sqrt{\Delta f}$$

4.3 Ringbandkerne für tiefe Temperaturen

Für den Tieftemperaturbereich sind NiFe-Speziallegierungen entwickelt worden /13/, welche bei einer Temperatur von 4.2 K eine Anfangspermeabilität von 70000 aufweisen. Es besteht die Möglichkeit, weichmagnetische Ringkerne aus Pulverwerkstoffen zu pressen und im Magnetfeld bei hoher Temperatur zu sintern, was allerdings hohe Werkzeug- und Fertigungskosten verursacht. Häufig wird daher auf Ringbandkerne zurückgegriffen, die auch in kleinen Stückzahlen relativ preiswert nach Maß angefertigt werden können. Sie werden durch Aufwickeln eines dünnen weichmagnetischen, isolierten Metallbandes auf einen paramagnetischen Stützring gefertigt und anschließend zur Einstellung der gewünschten magnetischen Eigenschaften einer Magnetfeldtemperung unterzogen. Die Magnetfeldtemperung beeinflusst hauptsächlich die Anfangspermeabilität, die Koerzitivfeldstärke, das Alterungsverhalten sowie die Form der Hysteresekurve. Abschließend werden die Ringbandkerne in isolierende Schutztröge eingebettet.

Die beschriebene weichmagnetische NiFe-Speziallegierung trägt den Handelsnamen Cryoperm 10 /13/, ist aber zur Zeit nicht lieferbar /14/.

Eine weitere weichmagnetische, amorphe Ringbandkernlegierung, die für die Anwendung bei tiefen Temperaturen in Frage kommt, trägt den Handelsnamen VITROVAC 6025 - F /13/.

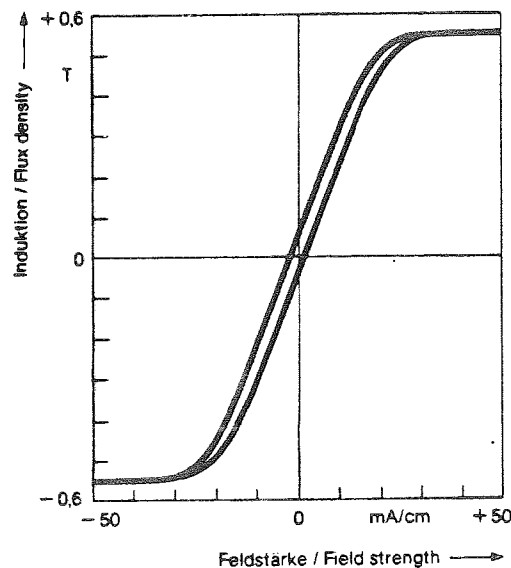


Abb. 19: Hysteresekurve eines gewickelten geschlossenen Kerns aus VITROVAC 6025 - F bei $T = 4.2 \text{ K}$ /16/

Bei der Entwicklung nach geeigneten amorphen Weichmagnetika zeigte sich, daß durch Zugabe von Silizium und Molybdän zu den herkömmlichen FeCoB - Legierungen wurde bei diesem Werkstoff die thermische Stabilität des amorphen Zustandes wesentlich erhöht. Auch die magnetischen Eigenschaften konnten so verbessert werden /15/.

Wird bei der Magnetfeldtemperung des amorphen Metalls mit der Zusammensetzung CoFe70 MoSiB30 (VITROVAC 6025), eine flache, abgerundete Hysteresekurve (Form F) dem weichmagnetischen Material eingeprägt (Abb.19), so erhält man eine Anfangspermeabilität von 20000 bei 4.2 K. Der Vorteil der Quertemperung (F-Typ) ist die flache Hystereschleife. Sie zeichnet sich durch das bevorzugte Auftreten von Drehprozessen aus, während Wandverschiebungen, sogenannte Barkhausensprünge, reduziert sind. Dieser Typ scheint auch für die DC-Anwendung geeigneter als Rechteckschleifen (Z - Typ).

4.4 Dimensionierung des Transformator-kerns

Damit ein optimales Auflösungsvermögen realisiert werden kann, müssen folgende Parameter (siehe Kapitel 4.2) bei der Dimensionierung der Detektorspule eingehalten werden:

$$L_D = L_{SQ}$$

$$N_D = 1.$$

Desweiteren muß darauf geachtet werden, daß der Innendurchmesser wegen der Strahlrohrgeometrie und der notwendigen magnetischen Abschirmung festgelegt ist zu

$$d_i = 173.5\text{mm}.$$

Es ist darauf zu achten, daß ein möglichst großer magnetischer Kernquerschnitt verwendet wird. Er läßt sich nur sinnvoll mit der Breite des Bandwickels vergrößern, jedoch kaum durch höheres Bewickeln, denn die mittlere Länge des Ringkerns wächst bei festgehaltenem Innenradius nahezu linear mit steigendem Außenradius, wenn die Wickelhöhe viel kleiner als der mittlere Radius ist. Wickelhöhen, die im Bereich der radialen Abmessungen liegen, sind fertigungstechnisch nicht realisierbar /14/. Die Fertigungsbreite der Bänder ist nach den Angaben des Herstellers ebenfalls begrenzt. Zur Zeit sind Bandbreiten von 5, 10, 15, 20 und 25 mm erhältlich.

Wie in Kapitel 2.6.3 gezeigt wurde, weisen solche weichmagnetischen Ringbandkerne einen Rauschstrom auf, der aufgrund des sehr kleinen Auflösungsvermögens berücksichtigt

werden muß.

Zu beachten ist weiterhin, daß Ringbandkerne wegen der Isolierschicht zwischen jeder Lage eine geringere Induktivität besitzen. Diese Tatsache wird mittels eines Füllfaktors in der Rechnung berücksichtigt. Mit einem Ringbandkern VITROVAC 6025 - F (Tab.7) und dem SQUID (Tab.5), ergeben sich die theoretischen Kenndaten der Detektorspule (Tab.8; siehe auch Anhang B bzw. Kapitel 2.5, 2.6.3 und 4.2).

Tab.7: Ringbandkern-Eigenschaften

$\mu_r (T = 4.2 \text{ K })$	20000
h^*	25 mm
d_i	173.5 mm
d_a	231 mm
Füllfaktor	0.8

Tab.8: Kenndaten der Detektorspule

ΔI	$2.7 * 10^{-10} \text{ A}$
δI_{eff}	$5.1 * 10^{-10} \text{ A}$
L_D	22.9 μH

Die Auflösungsgrenze sowie das Nyquist-Rauschen sind annähernd gleich, was durch die Variation der Detektorkerngeometrie erreicht werden konnte. Aufgrund des thermischen Rauschens ist das theoretische Auflösungsvermögen um einen Faktor 2 besser als das angestrebte.

4.5 Dimensionierung des Anpassungstransformators

Die Detektorinduktivität beträgt $L_D = 23 \mu\text{H}$ (Tab.8). Wegen der in Kapitel 2.5 genannten Gründe muß eine Anpassung der Detektorinduktivität an die SQUID-Eingangsimpedanz erfolgen.

Betrachtet man zunächst einen idealen Transformator, so hat dieser bekanntlich die Eigenschaft, eine ihm zugeführte Spannung U_1 im Verhältnis der Windungszahlen zu erhöhen bzw. herabzusetzen. Die am Ausgang auftretende Spannung U_2 ist also gegeben durch

$$(58) \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} .$$

Wird das Verhältnis der Windungszahlen als Übersetzungsverhältnis \ddot{u} bezeichnet, so folgt

$$(59) \quad U_1 = \ddot{u} U_2$$

mit

$$(60) \quad \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} .$$

Vom idealen Übertrager wird gefordert, daß die Änderung der Spannung ohne Leistungsverlust und ohne Änderung des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung erfolgt. Das heißt:

$$(61) \quad N_1 = N_2 \dots U_1 I_1 = U_2 I_2 .$$

Berücksichtigt man (59), so folgt daraus:

$$(62) \quad I_2 = \frac{I_1}{\ddot{u}} .$$

Wird ein Flußtransformator als Anpaßtransformator zwischen zwei Induktivitäten verwendet (Abb.20), so gilt im idealen Fall:

$$(63) \quad j \omega L_D = \frac{u_2}{i_2} = \ddot{u} u_1 \frac{\ddot{u}}{i_1} = \ddot{u}^2 \frac{u_1}{i_1}$$

$$(64) \quad j \omega L_{SQ} = \frac{u_1}{i_1} .$$

Hieraus folgt

$$(66) \quad L_D = \ddot{u}^2 L_{SQ} .$$

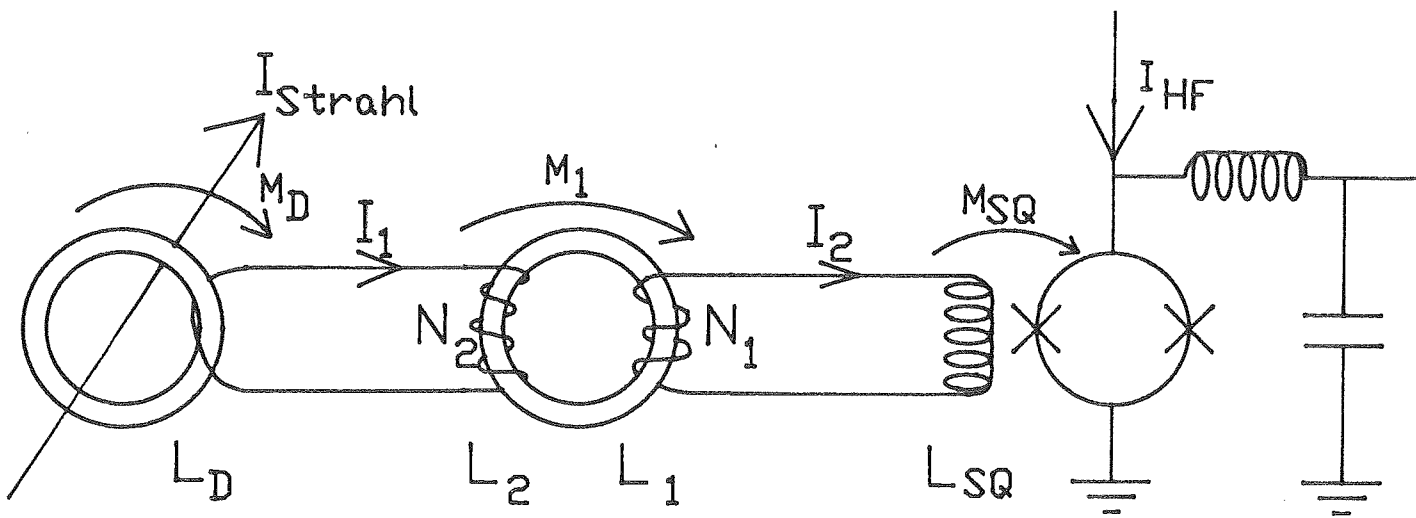


Abb.20: Flußtransformator zum Anpassen zweier Induktivitäten

Wird der Flußtransformator im supraleitenden Zustand betrieben, d.h. ein Ringbandkern wird jeweils mit einem supraleitenden Draht als Primär- und Sekundärwicklung versehen, so treten keine Leitungsverluste auf. Die einzigen Verluste, die auftreten können, sind Verluste des Ringbandkernes, welche in erster Näherung vernachlässigt werden können, und Streuflüsse.

Die Verluste entstehen durch Wirbelströme und Ummagnetisierungen in dem weichmagnetischen Kern.

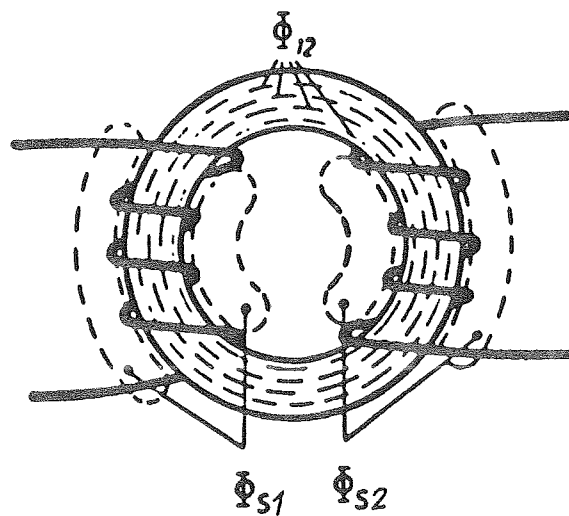


Abb. 21: Verlauf des magnetischen Nutzflusses ϕ_{12} und der beiden Streuflüsse ϕ_{S1} und ϕ_{S2} /10/

Die Streuinduktivität entsteht durch einen geringen Anteil ϕ_s des Hauptflusses, der nicht die gesamte Wicklung durchsetzt, sondern sich über den Luftweg zwischen den einzelnen Windungen schließt. Bei der Verwendung von hochpermeablen Ringbandkernen ist auch dieser Effekt zu vernachlässigen, da der Streuinduktivitätskoeffizient mit $1/\mu_r$ abnimmt. Da die SQUID-Induktivität nicht mit der Detektorinduktivität übereinstimmt, müssen die beiden Induktivitäten angepaßt werden. In Kapitel 4.1 wurde gezeigt, daß die SQUID-Induktivität $L_{SQ} = 0.75\mu\text{H}$ und die Detektorinduktivität $L_D = 23\mu\text{H}$ beträgt. Das Übertragungsverhältnis ergibt sich aus (66) und daraus ergeben sich die Windungszahlen für die Primärwicklung N_1 und die Sekundärwicklung N_2 . Da nur ganze Windungen gefertigt werden können, muß bei der Dimensionierung der Windungszahlen gerundet werden. Verwendet man einen Ringbandkern aus VITROVAC 6025, so ergeben sich folgende Parameter für den Anpaßtransformator:

Tab.9: Kenndaten des Anpaßtransformators

\ddot{u}	5
$A_L (T = 4.2 \text{ K })$	$0.2\mu\text{H}$
N_1	2
N_2	10
L_1	$0.8\mu\text{H}$
L_2	$20\mu\text{H}$

4.6 Die magnetische Abschirmung

Durch den in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen Meißner-Ochsenfeld-Effekt kann ein magnetisches Feld zwischen 2 supraleitenden Platten " geführt " werden. Befindet sich der Supraleiter unterhalb der kritischen Temperatur T_c und liegt ein äußeres magnetisches Feld an, so wird in den Supraleiter eine Spannung induziert, welche einen Abschirmstrom verursacht.

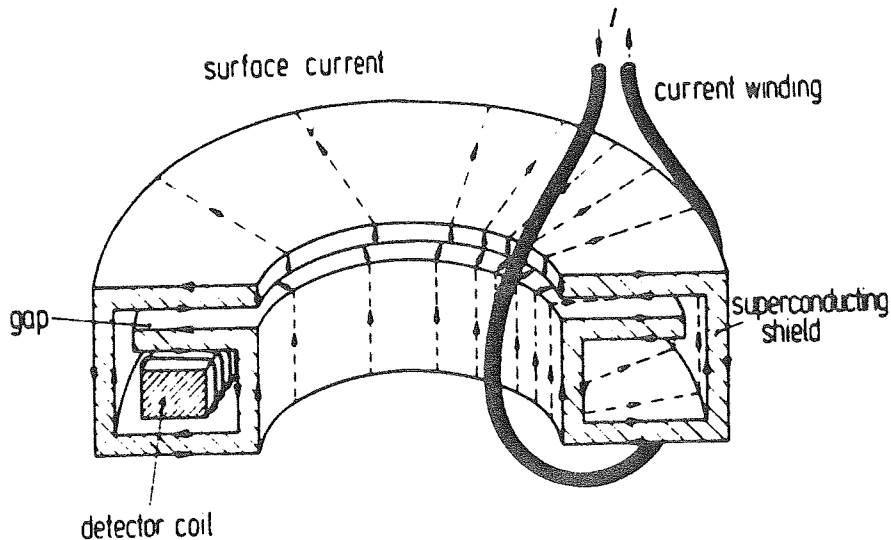


Abb.22: Abschirmsystem eines Kryo-Strom-Komparators /17/

Durch das Magnetfeld des Ionenstrahls entsteht ein Oberflächenstrom auf dem supra-leitenden Material. Dieser Abschirmstrom (Abb.22) fließt entlang der gesamten Oberfläche des Schirmsystems. Das azimuthale magnetische Feld, welches proportional dem Ionenstrom ist, wird aufgrund dieses Schirmstroms durch das mäanderförmige Abschirm-system geführt. Die azimuthale magnetische Feldkomponente kann so bis zum Detektorkern vordringen und dort eingekoppelt werden. Alle anderen äußeren Feldeinflüsse wirken aufgrund des Schirmstroms nicht auf das Meßsystem ein. Diese Magnetfelder werden erst beim Überschreiten des kritischen magnetischen Feldes in das Meßsystem eingekoppelt.

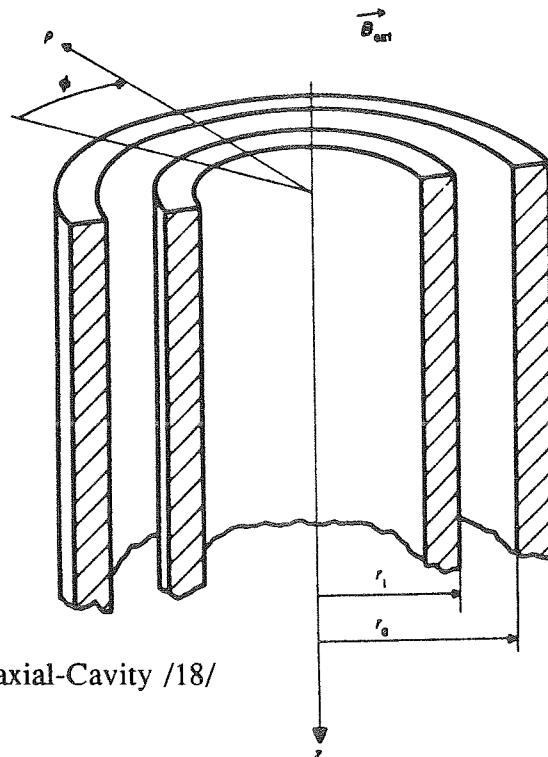


Abb.23: Coaxial-Cavity /18/

Es besteht die Möglichkeit, für diesen Zweck zwei verschiedene Geometrien zu verwenden. Es kann einerseits eine koaxiale Schirmung (Abb.23) zur Anwendung kommen, es besteht andererseits auch die Möglichkeit, eine ringförmige Geometrie (Abb.24) zu nutzen.

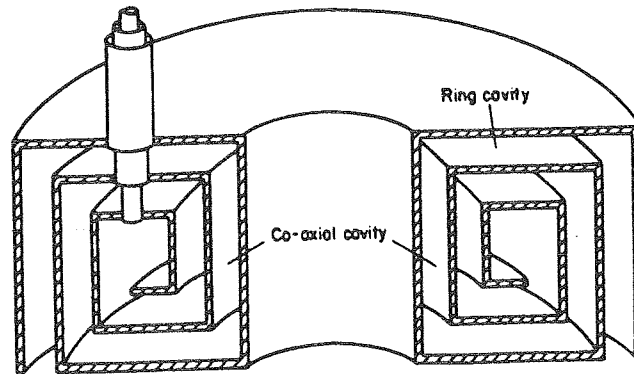
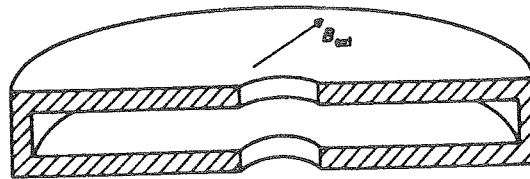
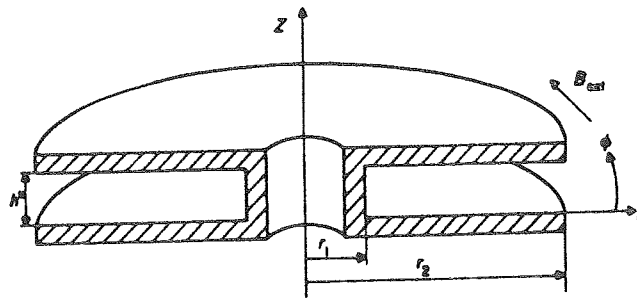


Fig. 1 Toroidal CCC with two types of cavities



Ring cavity 1



Ring cavity 2

Fig. 2 Two types of ring cavities

Abb.24: Ring-Cavity /19/

Die mathematischen Herleitungen zur Coaxial-bzw. Ring-Cavity befinden sich im Anhang A . Die Rechnungen haben gezeigt, daß die Ring-Cavity 2 keine Abschwächung bewirkt

und eine Überlagerung an den Grenzflächen von Ring-Cavity 1 zum Ring-Cavity 2 unnötig ist. Bei der Verwendung einer Coaxial-Cavity bestehen die Möglichkeiten eines einfachen Zylinders oder die eines koaxialen Zylinders.

Die Rechnungen ergaben eine Abschwächung für einen einfachen Zylinder von

$$(67) \quad A_z = e^{-1.84 \frac{z}{r}},$$

für die Coaxial-Cavities:

$$(68) \quad A_z = e^{-\frac{z}{r}} \quad \text{mit} \quad \frac{r_i}{r_a} \rightarrow 1$$

$$(69) \quad A_z = e^{-\frac{2}{1 + \frac{r_i}{r_0}} \frac{z}{r_0}} \quad \text{mit} \quad \frac{r_0}{r_i} \leq 1.5$$

und für die Ring-Cavity:

$$(70) \quad A_\phi = \frac{\rho^n + r_b^{2n} \rho^{-n}}{r_e^n + r_b^{2n} r_e^{-n}}$$

$$(71) \quad A_z = \frac{\operatorname{In}(m, [\frac{m\pi}{h^*} \rho]) - \frac{\operatorname{In}'(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_b])}{\operatorname{Kn}'(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_b])} \operatorname{Kn}(m, [\frac{m\pi}{h^*} \rho])}{\operatorname{In}(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_e]) - \frac{\operatorname{In}'(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_b])}{\operatorname{Kn}'(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_b])} \operatorname{Kn}(m, [\frac{m\pi}{h^*} r_e])}$$

Die Gleichungen zeigen, daß nicht nur das Feld, das abgeschirmt werden soll, geschwächt wird, sondern auch das zu messende Feld. Erste Rechnungen und Überlegungen zeigten, daß durch die Verwendung einer Coaxial-Cavity ein hoher konstruktiver Aufwand und relativ große Abmessungen bei schlechterer magnetischer Abschirmung entstehen würden.

Bei der Verwendung einer Ring-Cavity (Typ 1) mit einer " Reihenschaltung " von 4 Ringen wurde mit den folgenden Abmessungen die in Tab.11 erzielten theoretischen Abschwächungen erreicht:

Tab.10: Ring-Cavity, Abmessungen

r_i	154 mm
r_a	254 mm
h^*	0.8 mm
M	4

Tab.11: Ring-Cavity, Abschwächungen

A_ϕ	0.97
A_z	$2 * 10^{-9}$

Wie Tab. 11 zeigt, erreicht man mit der angegebenen Geometrie die notwendige Abschwächung gegen äußere magnetische Felder, die das Meßsignal stören würden. Die Schwächung des zu messenden Signals um 3% ist hinzunehmen, um eine annähernd ideale Abschirmung in z - Richtung zu realisieren. Aufgrund der Kalibriermöglichkeit des Meßsystems ist der Verlust unerheblich, da er ausgeglichen werden kann.

Wie in Kapitel 2.1.4 gezeigt, fließt der Schirmstrom nur bis zu einer bestimmten Eindringtiefe. Solange die Materialstärke der supraleitenden Abschirmung ein Vielfaches der Eindringtiefe beträgt und das äußere Feld kleiner ist als das kritische äußere Feld, kann kein äußeres magnetisches Feld in die supraleitende Abschirmung eindringen.

Aus konstruktiven Gründen (siehe Kapitel 5.1) wurde supraleitendes Blei mit einer Dicke von 2.5 mm gewählt, um zusätzlich eine selbsttragende Konstruktion zu verwirklichen.

5. Beschreibung der Apparatur

In Abb.25 sind einzelne Teile der Konstruktion wiedergegeben. Die Schirmzylinder enthalten noch ihre Drehkerne, da noch verschiedene Arbeiten daran vorgenommen werden müssen. Weiterhin ist der Ringbandkern aus VITROVAC 6025 - F gezeigt.

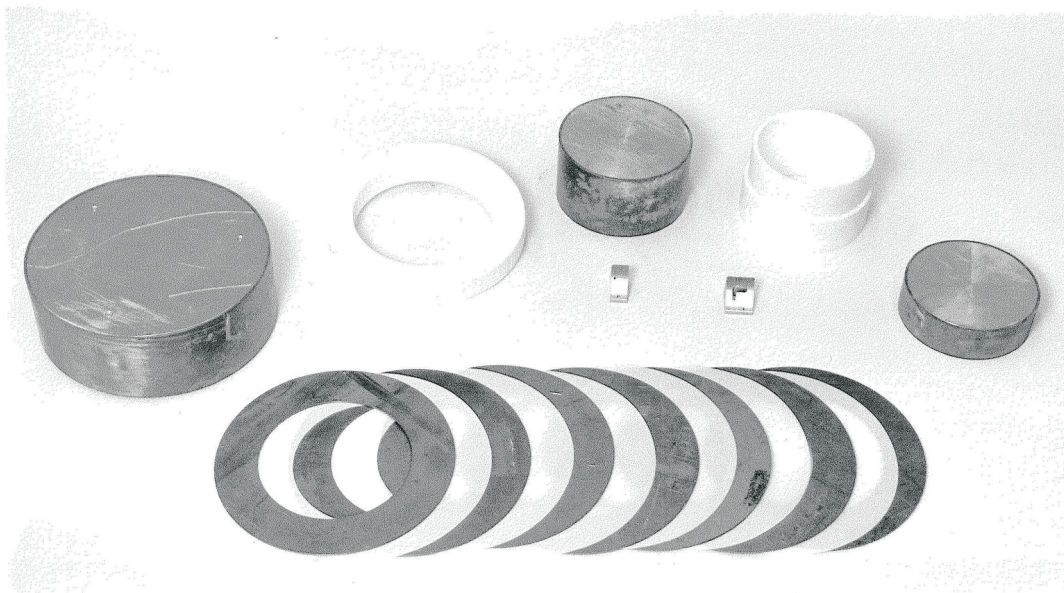


Abb.25: Die Einzelteile des Detektorsystems

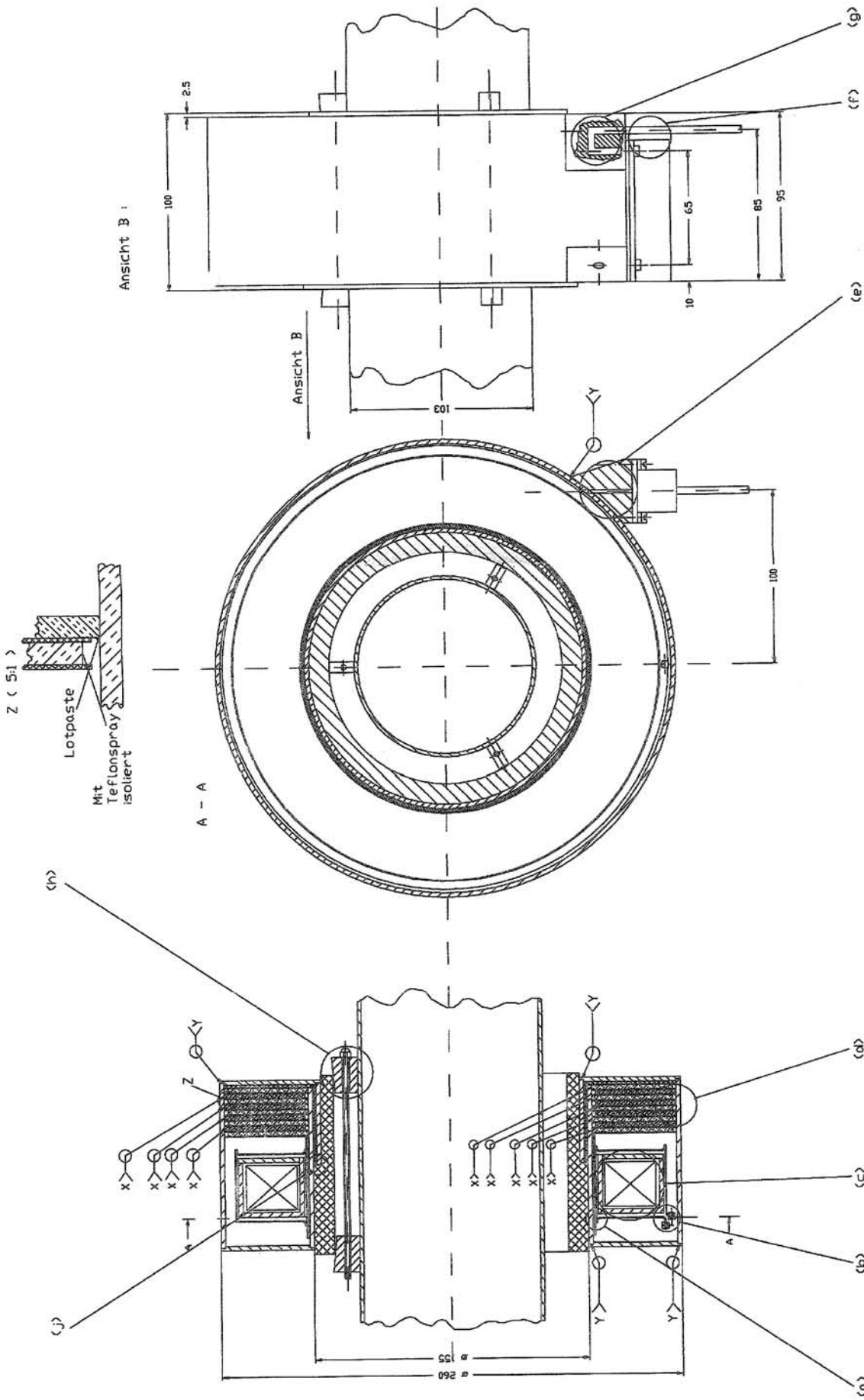
Wegen der Lieferverzögerung für die Niobleche, konnte die Detektorspule nicht fertiggestellt werden, so daß eine Vollendung der Detektorspule nicht erfolgen konnte. Die Detektorspule muß vor dem Schließen des äußeren Deckels eingebaut werden.

Die beiden Verbindungsstücke zwischen Abschirmgehäuse und SQUID-Gehäuse sind fertiggestellt, allerdings noch nicht auf den äußeren Schirmzylinder geschweißt. Weiterhin konnte das Gehäuse für den Flußtransformator, den SQUID und dessen Peripherie sowie die Heizungen nicht rechtzeitig bezogen werden. Die Teflon- und Bleischeiben sind in ihrer Einbaureihenfolge sichtbar.

5.1 Konstruktionsmerkmale

Die in Abb.26 mit kleinen Buchstaben gekennzeichneten Wirkorte beschreiben wesentliche Konstruktionsdetails.

- (a) Die Dimensionierung zeigte, daß die Detektorspule eine einzige Windung haben soll. Nach der Magnetfeldtemperatur des Ringbandkernmaterials ist es durchaus möglich, daß die Permeabilität entlang des Umfangs ungleichmäßig ist. Desweiteren treten beim Abkühlen erhebliche mechanische Spannungen im Material auf, diese sind eine weitere Ursache für die ungleichmäßige Permeabilität. Damit diese eventuell auftretenden Ungleichmäßigkeiten des Ringbandkerns keinen Einfluß auf das Meßsignal haben, wird ein einseitig offener Toroid um den Ringbandkern gelegt. Hierdurch wird eine Mittelung des abgegriffenen Signals vorgenommen und die Bedingung $N_D = 1$ erfüllt. Wird das Ringbandkernmaterial erhöhten Temperaturen ausgesetzt, d. h. Temperaturen größer als die Curietemperatur ($\approx 210 \text{ }^\circ\text{C}$), so treten Umkristallisationen des Ringbandkernmaterials auf. Damit dies vermieden wird und damit die Detektorspule ohne größeren Luftspalt auf dem Detektorkern sitzt, wird nach den Istmaßen des Detektorkerns ein Kern aus Edelstahl hergestellt. Dieser Kern dient einerseits als Wickelkern, beim Herstellen der zwei Niobzylinder und als Träger für die ersten beiden Schweißnähte der Detektorspule. Die letzte Schweißnaht der torodialen Detektorspule wird mit dem Detektorkern geschlossen. Damit das Ringbandkernmaterial bei dieser Schweißung keinen hohen Schweißtemperaturen ausgesetzt wird, müssen die Schweißlippen entsprechend lang ausgebildet sein und ein thermisch isolierendes Material das Ringbandkernmaterial ummanteln.



X= Dfenloetzung in Schutzgasatmosphaere mit der Lotpaste 54Pb-46Bi

Y= 13 / DIN 8563 T3-BK / DIN 8570 T1-B

Abb.26: Gesamtzeichnung des Strahlstrom-Transformators

- (b) An der supraleitenden, torodialen Detektorspule befinden sich zwei Anschlußfähnchen, an denen mittels Niobschrauben eine supraleitende Klemmverbindung erzielt werden soll. Mit diesen Klemmverbindungen werden Detektorspule und Anpaßtransformator verbunden. Dünne supraleitende Drähte werden in einen isolierenden Schlauch geschoben und anschließend verdrillt. Durch diese Bifilarleitung beeinflussen die äußeren magnetischen Felder das im Draht geführte Signal fast nicht.
- (c) Der Ringbandkern dient als Induktionsspule und wird aus 25 mm breitem, weichmagnetischem, amorphem Bandmaterial hergestellt. Das Bandmaterial ist isoliert. Mit Hilfe des Bandmaterials ist es möglich, relativ kostengünstig Induktionsspulen herzustellen. Die Herstellung sowie die besonderen Eigenschaften des Ringbandkernmaterials Vitrovac 6025 - F ist in Kapitel 4.3 und 4.4 beschrieben.
- Der Ringbandkern wird in einen elektrisch wie thermisch isolierenden Trog eingebettet, um einerseits die Detektorspule vom Ringbandkern zu isolieren und andererseits - wie unter (a) erwähnt - thermisch zu isolieren. Zwischen dem Ringbandkern und der Troginnenwand sollte ein ausreichend großer Freiraum existieren, um die verschiedenen thermischen Längenausdehnungskoeffizienten auszugleichen.
- Treten mechanische Spannungen auf, sinkt die Permeabilität ab. Zusätzlich wird der Freiraum mit Watte ausgestopft, damit keine unnötige Luft eingeschlossen und somit eingefroren wird /14/. Dies würde zu einer Funktionsbeeinträchtigung des Detektors führen, da der Einfluß des paramagnetischen Sauerstoffs in der Luft zum Tragen kommen könnte.
- (d) Damit die azimuthale magnetische Feldkomponente mäanderförmig durch die Abschirmung geführt wird, ohne hierbei nennenswerte Verluste zu erfahren, und damit alle restlichen Feldkomponenten " herausgefiltert " werden, muß ein definierter Abstand zwischen den Platten gewährleistet sein. Weiterhin ist die Planparallelität der Platten ausschlaggebend für die Güte des Signals. Mit Hilfe von planparallelen elektrisch isolierenden Platten ist dies am einfachsten zu realisieren. Beim Abkühlvorgang zeigen die verschiedenen Materialien unterschiedliche Längenänderungen. Die Isolierscheiben zeigen eine höhere Längenausdehnung als das supraleitende Material, sodaß eine ausreichende Toleranz an den Isolierscheiben vorzusehen ist. Die Funktionsfähigkeit der supraleitenden Abschirmung ist nur dann

gewährleistet, wenn die supraleitenden Scheiben jeweils innen oder außen mit den Schirmzylindern supraleitend verbunden werden.

- (e) Dieser Sockel, mit dem das SQUID-Gehäuse auf dem Schirmsystem montiert wird, ist aus supraleitendem Material hergestellt. Er dient desweiteren als Verbindungsstück zwischen Detektorspule und Anpaßtransformator. Eine Bohrung ermöglicht die elektrische Verbindung dieser beiden Bauteile. Diese Bohrung sollte möglichst klein sein, damit das magnetische Feld, das in den Detektor eingekoppelt wird, nur geringfügig auf das SQUID-Meßsystem einwirken kann. Je kleiner die Bohrung hergestellt wird, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Magnetfeld in das SQUID-Gehäuse eindringt.
- (f) In dem SQUID-Gehäuse befinden sich der Anpaßtransformator, der SQUID, der Schwingkreis sowie Heizungen. Die Heizungen dienen dazu, die einzelnen supraleitenden Komponenten im Bedarfsfall normalleitend zu machen. Der Bedarfsfall tritt ein, wenn magnetischer Fluß im Supraleiter " eingefroren " ist. Durch den eingefrorenen magnetischen Fluß würde das Meßsignal verfälscht werden.
- (g) Der zweite Sockel dient ebenfalls als mechanisch lösbare Verbindung zwischen dem SQUID-Gehäuse und dem magnetischen Abschirmsystem. Die Steuer- und Signalleitungen des SQUIDs befinden sich in einem Rohr, welches in den Sockel eingelötet wird. Damit eine ideale Abschirmung gegen äußere magnetische Felder erzielt werden kann, befindet sich eine magnetische Falle in dem Sockel. Die magnetische Falle wird durch zwei Bohrungen und einen Verbindungskanal realisiert. Die gegebene U-Form, sowie die Verwendung von supraleitendem Material ermöglicht, wie beim Detektorabschirmsystem, eine Abschirmung der äußeren magnetischen Felder aufgrund des Meißner-Ochsenfeld-Effekts. Es ist allerdings darauf zu achten, daß die Schweiß- bzw. Lötstellen eine magnetisch dichte und supraleitende Verbindung darstellen.
- (h) Das Trägerrohr wird von 6 Zentrierbolzen mit rechteckigem Querschnitt auf dem Strahlrohr befestigt. Abb.26 zeigt diese Klemmverbindung. Die Klemmverbindung kommt durch die Keilform der Zentrierbolzen und die Schrauben zustande. Mit Hilfe der Keilform können eventuell auftretende Toleranzen ausgeglichen werden.

Die Schrauben werden aus Gewindestäben und Hutmuttern hergestellt.

- (j) Der Eingang des Schirmsystems, in den die azimutale, magnetische Feldkomponente des Ionenstrahls eingekoppelt wird, wurde in die Mitte des Meßsystems gelegt. Durch die Lage des " Tors " wird die Wahrscheinlichkeit, daß äußere, magnetische Felder eingekoppelt werden, minimiert.

5.2 Werkstoffe und Fertigungsverfahren

- Das Trägerrohr sowie die Isolierscheiben bestehen aus Polytetrafluoräthylen (PTFE; Teflon). Es ist ein ausgezeichnetes elektrisches und thermisches Isolationsmaterial. Dies ist für die Tieftemperaturtechnologie bis 4.2 K geeignet, da es nicht versprödet. Teflon zeigt eine dauernde Wärmebeständigkeit bis 260°C und ist spanend bearbeitbar.
- Die supraleitende Abschirmung wird aus Pb 99.95 hergestellt. Dies ist ein Werkstoff, der erst mit einer Dicke von ca. 2 mm in der gezeigten Geometrie eine selbsttragende Konstruktion erlaubt. Das weiche Material gestattet ohne einen speziellen Wickelkern die verschiedenen Schirmzylinder herzustellen. Dies geschieht am einfachsten durch Aufwickeln auf die Bleischeiben bzw. auf das Trägerrohr. Die Verbindung zwischen Scheiben und Zylinder wird durch eine Weichlötung mit einer offenen Acetylen-Sauerstoffflamme realisiert. Dafür erwies sich das Lot Pb 56 Bi 44 am geeignetsten. Die äußeren Deckel und die Längsnähte der Schirmzylinder werden mit einem Mikro-WIG-Schutzgasschweißverfahren verschlossen. Als Zusatz dienen dünne Streifen des genannten Weichbleis.
 Beim Schweißen wie auch beim Löten kommt das Flußmittel Degussa Soldaflux Z zur Anwendung. Damit beim Löten zwei benachbarte Scheiben nicht kurzgeschlossen werden, wird die jeweils nicht zu verlötende Scheibe in der erwärmten Zone mit Teflonspray isoliert.
- Der Schutztroge für den Vitrovac 6025 - F Ringbandkern besteht ebenfalls aus PTFE. Da bei der tiefen Temperatur kein Pressitz zwischen Deckel und Troge verwendet werden kann, wird zusätzlich eine Lage 0.1 mm dicken PTFE-Bandes um den Troge gewickelt. Mit Hilfe des thermisch isolierenden PTFE-Troges ist es möglich, die letzte Schweißnaht der Detektorspule mit dem Detektorkern als Inhalt zu schließen, ohne daß dieser nennenswert thermisch belastet wird (Gefahr des Umkristallisierens).

- Die Detektorspule wird aus supraleitendem Niob hergestellt. Der äußere wie auch der innere Zylinder werden aus Kostengründen jeweils aus zwei 0.5 mm dicken Blechen gefertigt. Die zwei Scheiben werden aus zwei 0.5 mm dicken Blechen gestanzt. Anschließend wird die Schweißlippe angedrückt.

Mit Hilfe eines Mikro-WIG-Schutzgasschweißverfahrens werden die Bleche an der Schweißlippe miteinander verschweißt. Beim Schweißen wird die Wolframelektrode lediglich zum Zünden des Lichtbogens genutzt. Als Zusatzmaterial dienen dünne Streifen Niob. Es ist am günstigsten, im Impulsbetrieb zu arbeiten, so daß eine unnötige Erwärmung des Innenraumes und ein Verziehen der Bleche ausgeschlossen werden können. Niob kann nur im Vakuum oder unter reinem Schutzgas (100 % Ar) geschweißt werden. Ein anderes supraleitendes Material, z. B. Blei, kann nicht verwendet werden, da der SQUID sowie die Verbindung zwischen SQUID und Detektorspule aus Niob hergestellt sind. An der Kontaktstelle zwischen den beiden Supraleitern könnte ein weiterer Josephson-Kontakt entstehen, so daß der Detektor nicht ordnungsgemäß funktionieren würde.

- Bei den Zentrierbolzen wird die schlechte Wärmeleitfähigkeit sowie die schlechte elektrische Leitfähigkeit von PTFE ausgenutzt. Im Strahlrohr herrscht Raumtemperatur (300 K), das Meßsystem selbst befindet sich in flüssigem Helium (4.2 K). Es können erhebliche thermische Verluste durch diesen Übergang entstehen, wenn kein thermisch isolierendes Material verwendet wird. Wie in Abschnitt 2.8.2 beschrieben, treten auf dem Strahlrohr influenzierte Wandströme auf. Wird das Strahlrohr elektrisch vom Meßsystem isoliert, tritt hierdurch keine Beeinflussung des Meßsignals ein. Da in die Zentrierbolzen ein Gewinde geschnitten werden muß, muß der Werkstoff eine gewisse Mindestzugfestigkeit aufweisen. Ein Material, daß all diese Bedingungen erfüllt, ist z. B. PTFE.

Für die Gewindestäbe und die Hutmuttern wurde ein nickelhaltiger austenitischer Edelstahl (1.4571) gewählt. Das Material hat eine erhöhte Kryofestigkeit. Die Kerbschlagzähigkeit ist ebenfalls erhöht. Dies ist notwendig, da herkömmliche Edelstähle bei tiefen Temperaturen spröde werden und dadurch lediglich geringen Belastungen standhalten.

- Die Sockel werden aus supraleitendem Weichblei (Pb 99.95) hergestellt. Beim Verschweißen der Sockel ist darauf zu achten, daß ein Zugdraht durch die Bohrungen hindurch geschoben wird, um das Einfädeln der Steuer- und Versorgungsleitungen beim

Zusammenbau zu ermöglichen.

6. Vorbereitende Messungen

6.1 Das SQUID-Meßsystem

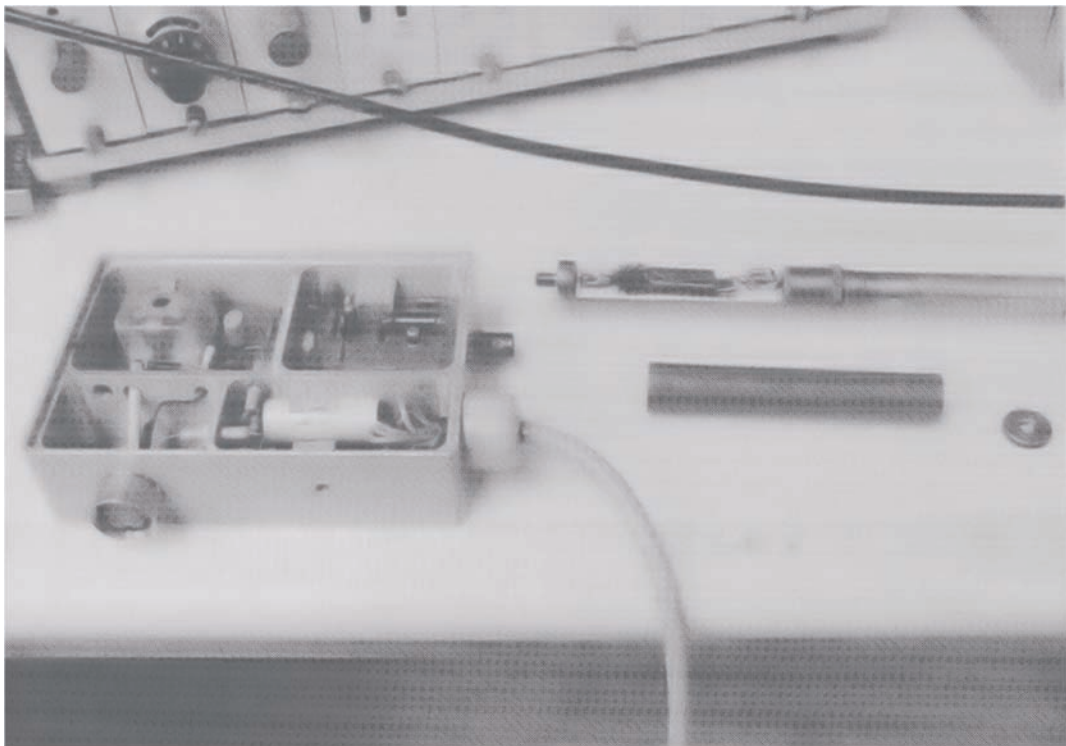


Abb.27: SQUID, Meßstab und Vorverstärker

Die Angaben in /12/ über das Flußrauschen und das daraus resultierende Ausgangsspannungsrauschen sind Standardwerte, die üblicherweise erreicht werden. Wie bereits erwähnt, wird der SQUID als planartechnisches Bauteil hergestellt. Er weist eine geringe Toleranz in seinen Systemparametern auf. Weitere Abweichungen von den angegebenen Standardwerten können durch die elektronischen Bauteile des Meßsignalverstärkers hervorgerufen werden. Da mit dem Meßsystem das SQUID bis zu seinen Grenzparametern ausge-

nutzt werden soll, ist es notwendig, die relevanten Parameter vor dem Einbau in das Gerät zu bestimmen. Damit eine genaue Aussage über die Auflösungsgrenze gemacht werden kann, muß der Frequenzgang des zur Anwendung kommenden SQUIDs aufgezeichnet werden. Hierzu wurde der Meßkopf und der Meßstab, die üblicherweise zusammen mit dem SQUID geliefert werden, benutzt. Der Meßkopf beinhaltet den SQUID, die supraleitende Eingangsspule sowie den Schwingkreis. In dem Meßstab, welcher aus Neusilber hergestellt ist, befinden sich drei verdrehte und untereinander geschirmte Leitungspaare, die als Steuer- und Versorgungsleitungen genutzt werden. Bei dieser Messung wird keine "Antenne", also Eingangsspule an den SQUID angeschlossen. Es wird mit einem offenen Eingang gearbeitet, sodaß lediglich das Rauschen des gesamten Meßsystems gemessen wird.

6.1.1 Einstellen und Abgleich des SQUID-Meßsystems

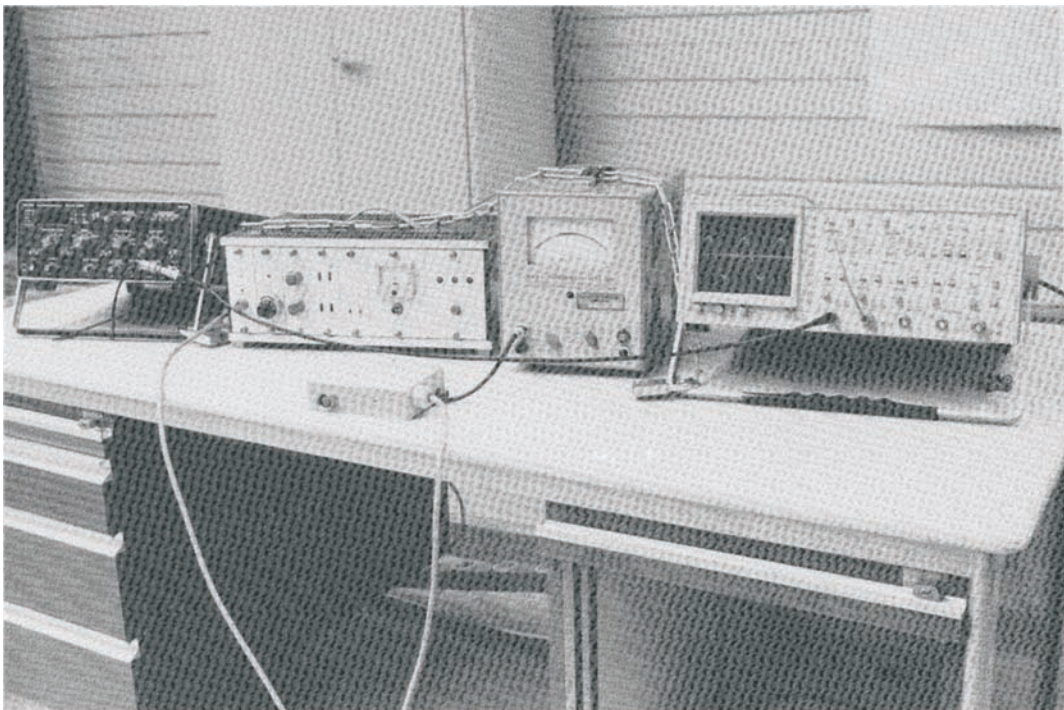


Abb.28: Meßaufbau zum Einstellen des Arbeitspunktes des SQUID-Meßsystems

Das Blockschaltbild (Abb.29) zeigt den hierzu notwendigen Versuchsaufbau.

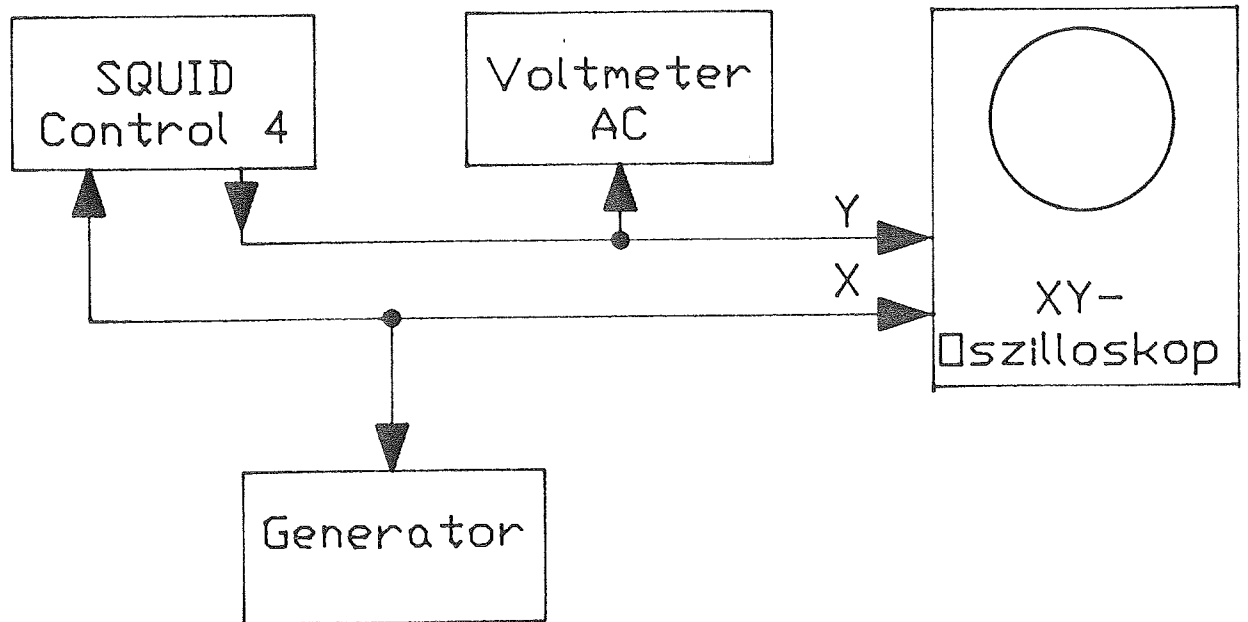


Abb.29: Blockschaltbild des elektrischen Versuchsaufbaus zum Abgleich des SQUID-Meßsystems /12/

Die für den Abgleich notwendigen Arbeitsschritte sind in /12/ detailliert erläutert. Bei optimal eingestelltem Gerät wird die folgende $U-\phi$ -Kennlinie vom Oszilloskop abgebildet.

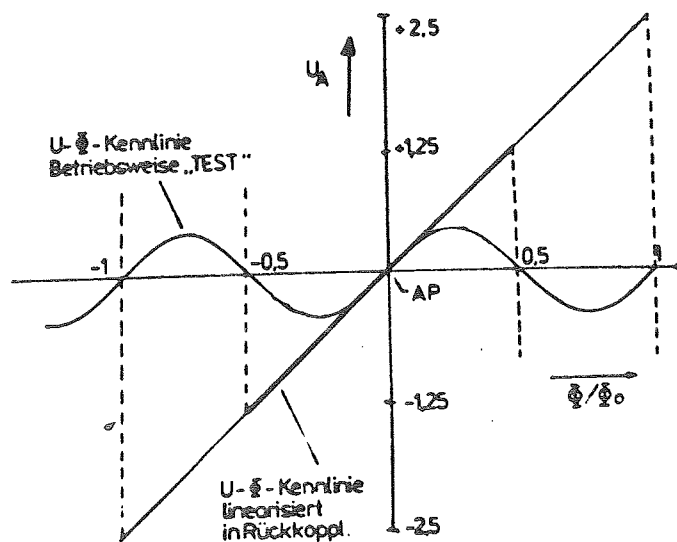


Abb.30: Schematische Darstellung der $U-\phi$ -Kennlinie des SQUIDs /12/

6.1.2 Messung der rauschbegrenzten Auflösung

Nach dem Abgleich des Gerätes kann die mit dem Gerät bzw. dem eingebauten Sensor erreichbare rauschbegrenzte Auflösung bestimmt werden. Der im Blockschaltbild (Abb.29) enthaltene externe Generator wird zur Bestimmung der rauschbegrenzten Auflösung abgetrennt. Das Ausgangssignal, welches z. B. mit einem Oszilloskop sichtbar gemacht werden kann, ist schematisch als U- ϕ -Kennlinie in Abb.30 dargestellt. Durch das Abtrennen des externen Generators zieht sich die U- ϕ -Kennlinie auf einen " Punkt " zusammen. Mit Hilfe des an der Steuereinheit SQUID-Control 4 befindlichen Drehpotentiometers " DC- Offset " ist der Punkt in die Nähe der Nullage zu bringen. Wird an dem Ausgang der Steuereinheit das Oszilloskop abgetrennt und stattdessen ein Spektrum-Analysator angeschlossen, kann das Rauschspektrum erfaßt werden.

Damit das SQUID-Meßsystem bis an seine Grenzen ausgenutzt werden kann, gibt der Hersteller /9/ folgende Hinweise:

- Da der rauschoptimale Arbeitspunkt des SQUIDs nicht immer mit dem in /12/ angegebenen Wert übereinstimmt, kann durch geringe Veränderung des BIAS-Stromes oft eine weitere Verbesserung der Rauschauflösung erreicht werden.
- Bei nichtsymmetrischer Kennlinie des Sensors kann die Rauschauflösung auf der zweiten möglichen Flanke der Kennlinie günstigere Werte ergeben. Diese zweite Flanke wird durch Umschalten der Phase um 180° (MOD PHASE $0^\circ - 180^\circ$) erreicht.
- Bestimmte SQUID-Sensoren verfügen aufgrund ihrer Kennlinienstruktur über mehrere (2 bis 3) mögliche Arbeitspunkte, die insbesondere bezüglich des erreichbaren Auflösungsvermögens unterschiedliche Werte liefern können.

Aufgrund des offenen Eingangs wird lediglich das Rauschen des SQUIDs sowie der nachgeschalteten Elektronik aufgezeichnet. Falls es notwendig ist, kann auch der Frequenzgang des Verstärkers allein aufgenommen werden.

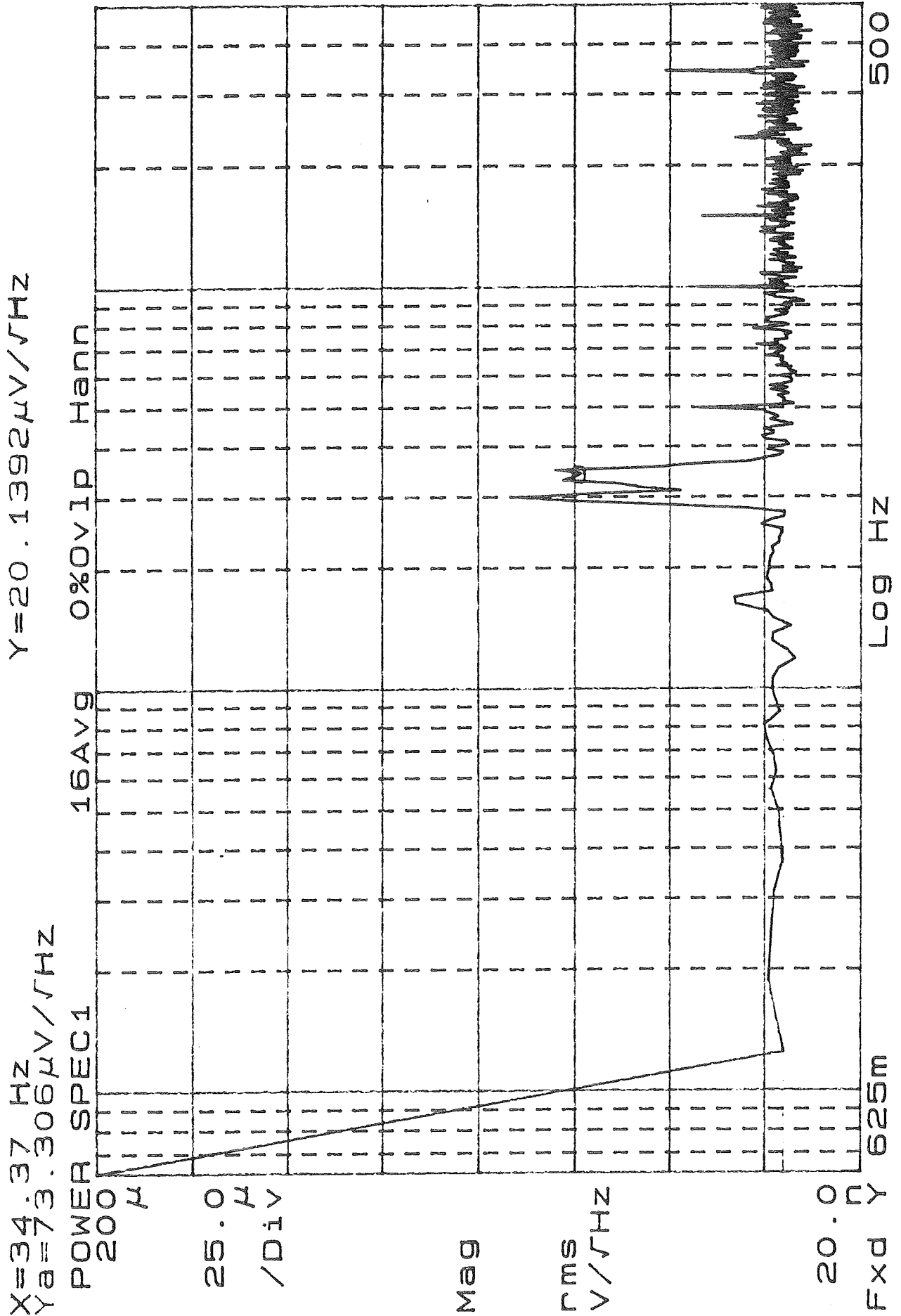


Abb.31: Frequenzgang des SQUID-Meßsystems bei offenem Eingang

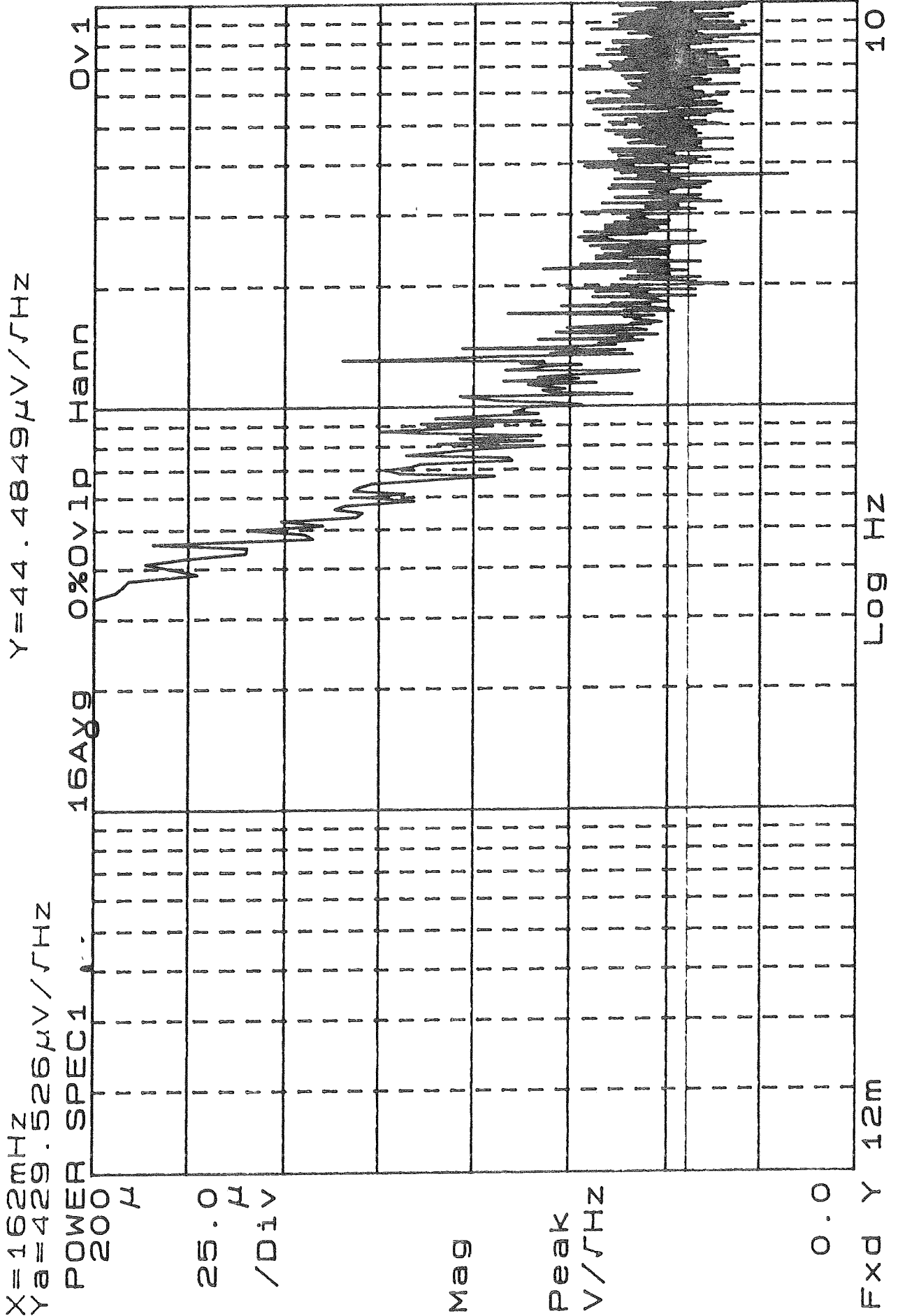


Abb.32: Ausschnitt aus dem Frequenzgang des SQUID-Meßsystems

Bei der Auswertung der beiden Frequenzgänge zeigte sich, daß das Ausgangsspannungsrauschen $20 \mu\text{V} \cdot \text{Hz}^{0.5}$ im eingeschwungenen Zustand beträgt. Der Standardwert für die Flußauflösungsgrenze beträgt nach /12/ für das SQUID-Meßsystem $1 \cdot 10^{-5} \Phi_0 \cdot \text{Hz}^{0.5}$. Da bei dieser Messung das maximale Ausgangsspannungssignal von $2.5 \text{ V} / \Phi_0$ genutzt wurde, ergibt sich das theoretische Ausgangsspannungsrauschen für diesen Meßbereich zu $25 \mu\text{V} \cdot \text{Hz}^{0.5}$. Die Abweichung des Standardwertes vom tatsächlichen Wert von 25 % ist laut Herstellerangaben /9/ üblich, da der Hersteller üblicherweise die obere Auflösungsgrenze angibt.

Die Ursache der extremen Spitze bei 34.37 Hz konnte durch eine weitere Messung bestimmt werden. Es zeigte sich, daß mechanische Schwingungen des Gebäudes, hervorgerufen durch Bauarbeiten, die Ursache waren. Durch die Messung wird gleichzeitig deutlich, daß das Meßsystem aufgrund seines hohen Auflösungsvermögens sehr empfindlich wird. Im späteren Dauerbetrieb wird es deshalb unumgänglich sein, den Kryostaten mit dem Meßsystem auf einem festen Fundament zu plazieren und zu dämpfen.

7. Ausblick

7.1 Die supraleitende Abschirmung

Eine Überprüfung der Funktionstauglichkeit des Abschirmsystems ist prinzipiell nur im fertig montierten Zustand durch eine Testmessung möglich. Allerdings kann beim Bau des Systems mit Hilfe einer Kapazitätsmessung festgestellt werden, ob ein elektrischer Kurzschluß vorhanden ist. Durch einen Kurzschluß, aber auch durch Öffnungen in den supraleitenden Verbindungsstellen wäre eine optimale Funktionsfähigkeit nicht mehr gegeben. Äußere magnetische Felder würden teilweise eingekoppelt werden. Die azimuthale Feldkomponente des Strahlstroms würde nicht verlustfrei zum Detektorkern "geführt" werden. Schweißt man zunächst eine Scheibe an den inneren Schirmzylinder und eine Scheibe an den äußeren Schirmzylinder, so kann nach jedem Schweißvorgang eine Überprüfung erfolgen. Ein Scheibenpaar gleicht einer Plattenkapazität und die beiden Schirmzylinder einer koaxialen Kapazität.

Mit

$$(72) \quad C_{sch} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi (r_2^2 - r_1^2)}{h^*}$$

und

$$(73) \quad C_{\text{zyl}} = \frac{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

ergeben sich aus den Schirmsystemparametern

Tab.12: Schirmsystemparameter

r_2	127.5 mm
r_1	80 mm
h^*	0.7 mm
l	95 mm
ϵ_r	2

folgende Kapazitäten:

Tab.13: Kapazitäten der Scheiben und der Zylinder

C_{sch}	0.78 nF
C_{zyl}	0.023 nF

Die Kapazität der beiden Zylinder kann gegenüber der Kapazität eines Scheibenpaares vernachlässigt werden. Wird eine weitere Scheibe eingelötet, verdoppelt sich die Scheibenkapazität und die Zylinderkapazität bleibt annähernd konstant.

Bei dem Meßvorgang ist auf eine optimale Kontaktstelle zu achten, so daß sämtliche störende Einflüsse minimiert werden. Schlechte Kontaktstellen verursachen störende kapazitive, induktive wie auch ohmsche Einflüsse, die die Messung stark verfälschen können.

7.2 Testmessung

Ist das Meßsystem fertiggestellt, können erste Messungen bei 4.2 K erfolgen. Hierbei ist zunächst darauf zu achten, daß das Meßsystem langsam abgekühlt wird, damit keine unnötigen mechanischen Spannungen, hervorgerufen durch den Temperaturwechsel, die Permeabilität der Induktionsspule erniedrigen.

Für erste Testmessungen genügt es, einen stromdurchflossenen Leiter zur Simulation des Strahlstroms zu verwenden. Die Variation der Gleichstromintensität wird Aufschluß über das praktisch erreichbare Auflösungsvermögen geben. Desweiteren wird die praktisch mögliche Anstiegszeit sowie die Bandbreite des Meßsystems durch die Testmessung aufgezeigt werden.

Erst Messungen werden Aufschluß darüber geben, ob die mechanischen Schwingungen des Refrigerators einen Einfluß auf den Meßvorgang haben. Hierzu muß die Abklingzeit der Schwingung sowie deren maximale Amplitude bestimmt werden.

Bei einem störenden Einfluß muß eine intermittierende Messung durchgeführt werden. Der Meßvorgang wird dann nach dem Abschalten des Refrigerators und Abwarten der zuvor bestimmten Abklingzeit einsetzen.

8. Literaturverzeichnis

- /1/ P. Kienle, G. Siegert
Neue Beschleuniger und Experimentieranlagen für schwere Ionen
bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung
Sonderdruck aus den Physikalischen Blättern
46 (1990), 109 - 112
Physik Verlag GmbH Weinheim
- /2/ Peter Heeg
Intensity Measurements of Heavy Ion Beams from SIS
GSI Papers presented at the
3rd European Particle Accelerator Conference, Berlin, 1992
- /3/ W. Buckel,
Supraleitung, 4. Auflage
VCH Verlagsgesellschaft Weinheim 1990
- /4/ J. C. Gallop,
SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics,
Adam Hilger Bristol, Philadelphia, New York 1991
- /5/ I. Klipping, C. Passow
VDI-Lehrgangshandbuch
Handbuch Supraleitung
VDI - Verlag
Düsseldorf 1974
- /6/ H. Frey, R. A. Haefer
Tiefemperaturtechnologie
VDI Verlag, Düsseldorf, 1981
- /7/ RF SQUID Sensors
Electronics & Systems
Fa. Quantum Design, 1990
San Diego, California, USA

- /8/ W. Göpel, J. Hesse, J. N. Zennel
Sensors
A Comprehensive Survey
Volume 5
Verlag VCH, Weinheim, 1989
- /9/ Priv. Mitt.
W. Vodel
1992
Friedrich-Schiller-Universität Jena
- /10/ H. Schlegel, A. Nowak
Impulstechnik
C. F. Winter' sche Verlagshandlung Prien 1961
- /11/ K.Grohmann, D. Hechtfisher
PTB-Mitteilungen
Sonderdruck Forschen und Prüfen
Kryostromkomparatoren als Präzisionsstandards für rationale Gleich-
und Wechselstromverhältnisse
92 (1982), 327 - 344
PTB Braunschweig und Berlin
- /12/ H. Koch, W. Vodel, T. Döhler
DC-SQUID - Meßsystem SQUID CONTROL 4
Bedienungsanleitung
Friedrich-Schiller-Universität Jena, 1990
- /13/ R. Boll (Bearb.)
Weichmagnetische Werkstoffe
4. Auflage 1990
Vacuumschmelze GmbH Hanau

- /14/ Priv. Mitt.
H. Wengerter
1992
Vacuumschmelze GmbH Hanau
- /15/ W. Kunz, H. R. Hilzinger
Magnetische Eigenschaften von amorphen FeNiMoSiB Legierungen
Vacuumschmelze GmbH Hanau
Sonderdruck aus den Berichten der Arbeitsgemeinschaft Magnetismus
Band 1 (1982)
Stahleisen-Verlag Düsseldorf
- /16/ Ringbandkerne aus Vitrovac 6025 F
Ausgabe 10 / 89
Vacuumschmelze GmbH Hanau
- /17/ K. Grohmann, D. Hechtfischer, J. Jakschik, H. Lübbig
PTB Berlin
A cryodevice for induction monitoring of DC electron or ion beams with nano-ampere resolution
Walter de Gryter & Co., Berlin, 1977, 312 - 315
- /18/ K. Grohmann, D. Hechtfischer, J. Jakschik, H. Lübbig
PTB Berlin
Field attenuation as the underlying principle of cryo current comparators, part I,
Magnetic shielding by superconducting simple and coaxial cylinders:
a comparison,
Cryogenics 16 (1976), 423 - 429
- /19/ K. Grohmann, D. Hechtfischer, J. Jakschik, H. Lübbig
PTB Berlin
Field attenuation as the underlying principle of cryo current comparators,
part II, 2. Ring cavity elements
Cryogenics 17 (1977), 601 - 605

Dank

Am Ende meiner Diplomarbeit möchte ich all denen danken, die mich auf dem schweren Weg bis zum Ziel meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Es gilt zunächst, den Herrn A. Peters, H. Reeg und P. Moritz für Ihre unermüdliche fachliche Beratung zu danken. Desweiteren möchte ich den Diplomanden C. H. Schroeder, O. Keller und J. Hecker für Ihren Beistand meinen Dank aussprechen.

Zum Abschluß möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir das Studium ermöglicht haben.

Tabellarischer Lebenslauf

Name: Volker Dürr

Geburtstag: 29.10.1967

Geburtsort: Worms

Familienstand: ledig

Wohnort: 6521 Hamm
Landdamm 122

Schulbildung:

1974 - 1978 Grundschule Eich
1978 - 1984 Realschule Gernsheim
1987 - 1988 Fachoberschule Worms
1988 - 1993 Fachhochschule Wiesbaden
 Fachbereich Physikalische Technik
 Studienort Rüsselsheim

Berufsausbildung:

1984 - 1987 Ausbildung als Meß- und Regelmechaniker
 bei der Procter & Gamble GmbH in Worms

Diplomarbeit:

März 1992 - Januar 1993 Gesellschaft für Schwerionenforschung mbH
 in Darmstadt

Rüsselsheim, 04. Januar 1993



Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, die Diplomarbeit nur unter Verwendung der in der Arbeit angegebenen Quellen und Hilfsmittel selbständig angefertigt zu haben.

Rüsselsheim, 04. Januar 1993

Volker Dügg

Anhang A:

Vertiefende Rechnungen zur magnetischen Abschirmung

Coaxial Cavity

Das magnetische Feld eines supraleitenden Zylinders kann wie folgt beschrieben werden.
Die Geometrie des Zylinders wird in Abb.1' gezeigt.

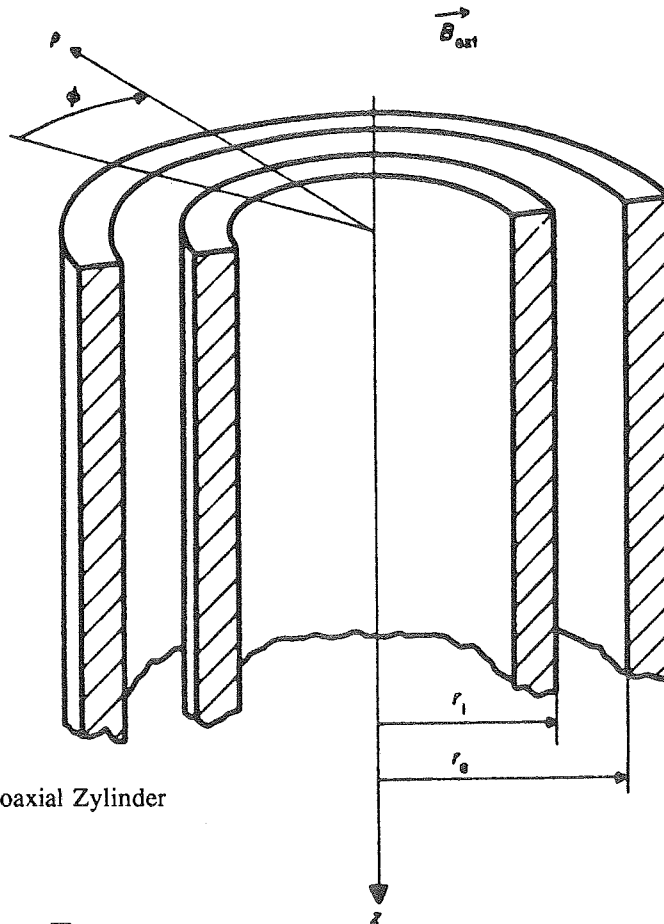


Abb.1: Coaxial Zylinder

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (\text{A1})$$

$$\nabla \vec{H} = -\Delta V_m \quad (\text{A2})$$

Wenn zwei supraleitende miteinander verbundene Bleche übereinander stehen, herrscht kein Potentialunterschied. Aufgrund dessen folgt für den Spezialfall der Supraleitung:

$$\frac{\partial V_m}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (\text{A3})$$

$$(\text{A4})$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{H} = 0$$

Die Laplace- Gleichung wird auf Grund der Geometrie in Zylinderkoordinaten angesetzt.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_m}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V_m}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V_m}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A5})$$

Die Laplace- Gleichung kann mittels eines Produktansatzes gelöst werden.

$$V(\rho, \phi, z) = R(\rho) \phi(\varphi) Z(z) \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Annahme : Die ρ - und die ϕ - Komponente sind konstant.

$$\begin{aligned} Z(z) \left[\phi(\varphi) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} \right] + R(\rho) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ + R(\rho) \phi(\varphi) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (R(\rho) \phi(\varphi) Z(z)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - k^2 Z(z) = 0 \quad (\text{A10})$$

mit

$$\begin{aligned} -k^2 = \frac{1}{R}(\rho) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} \right] \\ + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Die Differentialgleichung wird mit dem Exponentialansatz gelöst.

Es ergibt sich :

für alle $k \neq 0$

$$Z(z) = C_k e^{kz} + D_k e^{-kz} \quad (k \neq 0) \quad (\text{A12})$$

für $k = 0$

$$Z(z) = Cz + D \quad (k=0) \quad (\text{A13})$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, wird die bisherige Lösung (A13) in die Differentialgleichung (A9) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \left[\rho^2 k^2 + \frac{1}{R(\rho)} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right. \right. \\ \left. \left. + \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} \right) \right] \Phi(\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

setze

$$n^2 = \rho^2 k^2 + \frac{1}{R(\rho)} \left[\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} \right] \quad (\text{A15})$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial \phi^2} + n^2 \phi(\varphi) = 0 \quad (\text{A16})$$

Es ergibt sich :

$$\phi(\varphi) = A_1 e^{-n\varphi} + A_2 e^{n\varphi} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots) \quad (\text{A17})$$

$$\triangle$$

$$\phi(\varphi) = A_n \sin(n\varphi + \delta_n) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

$$\phi(\varphi) = A\varphi + B \quad (n = 0) \quad (\text{A18})$$

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \quad (\text{A19})$$

Die Differentialgleichung (A19) ist homogen, linear und besitzt nicht konstante Koeffizienten.

Sie wird als Besselsche Differentialgleichung bezeichnet und lautet allgemein:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A20})$$

mit $x = k \rho$ wird der Zusammenhang von Besselscher Differentialgleichung und (A19) hergestellt.

$$k^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{k^2}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(k^2 - \frac{n^2}{x^2} k^2\right) R = c \quad (\text{A21})$$

Wird (A21) umgeformt ergibt sich die Besselsche Differentialgleichung.

$$x^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + x \frac{\partial R}{\partial x} + (x^2 - n^2) R = 0 \quad (\text{A22})$$

Die Besselsche Differentialgleichung kann mit einem Potenzreihenansatz gelöst werden.

$$R(x) = A_0 x^{m+0} + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \dots + A_\nu x^{m+\nu} \quad (\text{A23a})$$

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{\nu+m} \quad (\text{A23b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= (m+0) A_0 x^{m-1} + (m+1) A_1 x^m + (m+2) A_2 x^{m+1} + \dots \\ &\quad + (m+\nu) A_\nu x^{m+\nu-1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} &= m(m-1) A_0 x^{m-2} + m(m+1) A_1 x^{m-1} + \\ &\quad + (m+1)(m+2) A_2 x^m + \dots + (m+\nu)(m+\nu-1) A_\nu x^{m+\nu-2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (A19)

$$\begin{aligned}
& m(m-1) A_0 x^m + m A_0 x^m + A_0 x^m (x^2 - n^2) + \\
& m(m+1) A_1 x^{m+1} + (m+1) A_1 x^{m+1} + A_1 x^{m+1} (x^2 - n^2) + \dots + \\
& (m+v) (m+v-1) A_v x^{m+v} + (m+v) A_v x^{m+v} + A_v x^{m+v} (x^2 - n^2) = 0
\end{aligned} \tag{A26}$$

$$\begin{aligned}
& A_0 x^m (m^2 + x^2 - n^2) + \\
& A_1 x^{m+1} ((m+1)^2 + x^2 - n^2) + \dots + \\
& A_v x^{m+v} ((m+v)^2 + x^2 - n^2) = 0
\end{aligned} \tag{A27}$$

Damit die Funktion für alle x gilt, muß jeder Summand 0 werden.

$$m^2 + x^2 - n^2 = 0 \tag{A28}$$

Dies kann nur 0 sein, wenn $x^2 = 0$ ist und $m = \pm v$ ist.

$$A_1 x^{m+1} (m^2 + 2m + 1 - n^2 + x^2) = 0 \tag{A29}$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 x^{m+2} (m^2 + 4m + 4 - n^2 + x^2) = 0 \tag{A30}$$

$$A_4 x^{m+4} (m^2 + 8m + 16 - n^2 + x^2) = 0 \tag{A31}$$

$$A_6 x^{m+6} (m^2 + 12m + 36 - n^2 + x^2) = 0 \tag{A32}$$

$$A_v x^{m+v} (m^2 + 2mv + v^2 - n^2 + x^2) = 0 \tag{A34}$$

Sind die genannten Bedingungen erfüllt ergibt sich /15 / :

$$A_v = - \frac{A_{v-2}}{(m+v)^2 - n^2} \quad (\text{A35})$$

$$A_{2v-1} = 0 \quad (\text{A36})$$

Wird in der Gleichung nun berücksichtigt, daß nur jedes 2. Glied auftritt, so ergibt sich :

$$a_{2v} = (-1)^v \frac{a_0}{v! 2^{2v} (m+1) (m+2) \dots (m+v)} \quad (\text{A37})$$

$$v = 1, 2, 3, \dots$$

Definition der Gammafunktion :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \quad (\text{A38})$$

$$n! = \Gamma(n+1) \quad (\text{A39})$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (\text{A40})$$

$$\Gamma(n) n^u = \Gamma(n+u) \quad (\text{A41})$$

Mit der folgenden Substitution geht (A37) über in (A44)

$$x = m+1 \quad (\text{A42})$$